אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

פתרונות – כיתות ז'

1. חזקה שלישית של מספר קטנה פי-8 מריבועו . מהו המספר?

תשובה. $\frac{1}{8}$.

פתרון. אם $x^3 = x^2/8$ אז $x = \frac{1}{8}$.

2. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר, כך שסכום החזקות השלישיות של ספרותיו לא מתחלק בסכום ספרותיו.

תשובה . 13.

פתרון. מספרים חד-ספרתי לא מתאימים: סכום החזקות השלישיות של הספרות פשוט שווה לחזקה השלישית שלו. מספר דו-ספרתי גם לא מתאים, הרי a^3+b^3 מתחלק ב-$a+b$ לפי נוסחאות כפל מקוצר. גם המספרים $100,101,...,109,110$ לא מתאימים, הרי גם כאן יש רק שתי ספרות משמעותיות, וכבר שמנו לב ש- a^3+b^3 מתחלק ב-$a+b$.
כמובן, 111 גם לא מתאים, לכן המספר הקטן ביותר שיש לו סיכוי הוא 112.
סכום החזקות השלישיות של הספרות של 112 הוא $1+1+8=10$, וסכום ספרותיו 4, והרי 10 לא מתחלק ב-4.

3. המספר 1.5 קטן פי-4 מסכום ספרותיו. מצאו מספר, שקטן פי-8 מסכום ספרותיו.

תשובות אפשריות. 1.125.

פתרון. אכן, קל לבדוק כי

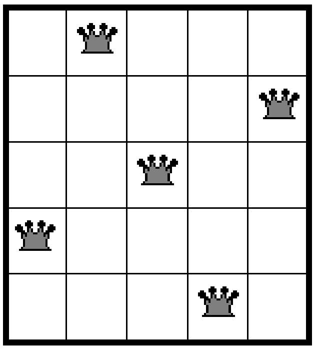
$$1.125 \cdot 8 = 9 = 1+1+2+5.$$

איך למצוא כזה מספר? נניח כי x המספר, N סכום הספרות שלו. אז $x = \dfrac{N}{8}$. היות ו-

N מספר שלם, אז x הוא כפולה שלמה של $0.125 = \dfrac{1}{8}$.

קל לראות גם, שהמספר לא יכול להיות גדול מדי. בדיקה של כפולות קטנות של $0.125=\frac{1}{8}$ מובילה לתשובה.

4. יש למקם על לוח 5×5 חמש מלכות, כך שהן לא יאיימו אחת על השניה ואף אחת מהן לא עומדת בפינה.



תשובה מוצגת בציור.

עם קצת בדיקת מקרים, ניתן לראות שיש רק שתי תמונות אפשריות: תמונה שבציור והתמונה שסימטרית לה.

5. מצאו את המספר האי-זוגי הגדול ביותר, שלא ניתן להציג כסכום של שלושה מספרים פריקים שונים.

תשובה. 17

פתרון. הסכום האי זוגי הקטן ביותר של 3 מספרים פריקים שונים הוא 4+6+9, הרי 4, 6 הם המספרים הפריקים הקטנים ביותר שקיימים, והמספר 9 הוא המספר הפריק האי-זוגי הקטן ביותר שקיים, ולפחות מחובר אחד חייב להיות אי-זוגי (אחרת גם הסכום יהיה זוגי. נשים לב כי $4+6+9 = 19$.

כל מספר שגדול מ-19 גם ניתן להציג בצורה כזאת, הרי ניתן להחליף את 6 בכל מספר זוגי גדול יותר, וכל התנאים עדיין יתקיימו. לכן ניתן להציג כל מספר שגדול מ-17, ולא את 17, כלומר 17 הוא המספר המרבי שאי-אפשר להציג כך.

6. לפני כשבועיים היה תאריך עם תכונה מיוחדת 15.10.2014, שבו סכום ארבע הספרות הראשונות שווה לסכום ארבע הספרות אחרונות. כמה תאריכים עם תכונה זאת אפשר לספור בין התאריכים : 20.10.2014 לבין 01.01.2015 ?

תשובה. 8

פתרון. צריך שסכום הספרות של היום פלוס סכום הספרות של החודש יהיה סכום הספרות של 2014, כלומר 7. סכום הספרות של החודש הוא 1 עבור אוקטובר, 2 עבור נובמבר, ו-3 עבור דצמבר (אלה 3 החודשים היחידים שרלוונטיים).

עבור אוקטובר: סכום הספרות של היום חייב להיות 6, וזה אחרי ה-20 לחודש, כלומר יש רק יום אחד (24 לאוקטובר).

עבור נובמבר: סכום הספרות צריך להיות 5. יש אחד כזה שמתחיל ב-0, אחד שמתחיל ב-1 ואחד שמתחיל ב-2 (כלומר 5, 14, 23). זה 3 אפשרויות.

עבור דצמבר: סכום הספרות שווה 4, זה יכול להיות 04 או 13 או 22 או 31 (אכן, יש 31 בדצמבר) כלומר 4 אפשרויות.

סה"כ 1+3+4 זה 8.

7. מצאו את האיבר הבא בסדרה $3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, ?$.

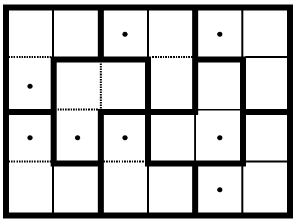
תשובה. 30.

הסבר: לקחו את סדרת הראשוניים 2,3,5,7,11,13,17,19,23 והוסיפו 1 לכל מספר.
המספר הראשוני הבא אחרי 23 זה 29.

8. נתונים שני מספרים טבעיים x ו-y, כך ש: $12x$ ו-$18y$ הם מספרים ריבועיים.
מהו הערך המינימאלי האפשרי של $x+y$?

תשובה. 5.

פתרון. המינימום עבור x הוא 3. אכן, $12x$ הוא ריבוע שמתחלק ב-3, לכן הוא ריבוע של מספר שמתחלק ב-3, לכן $12x$ מתחלק ב-9, לכן x מתחלק ב-3. לכן x לפחות 3, וקל לראות כי 3 מקיים את התנאי.
באופן דומה $18y$ הוא ריבוע זוגי, לכן הוא ריבוע של מספר זוגי, לכן $18y$ מתחלק ב-4, לכן y מתחלק ב-2. לכן y לפחות 2, וקל לראות כי 2 מקיים את התנאי.
הערך המינימאלי האפשרי של $x+y$ זה לפחות $3+2=5$.



9. יש לחתוך את המלבן הנתון ל-8 צורות זהות לפי קווי הרשת, כך שבתוך כל צורה תמצא נקודה אחת בדיוק.

התשובה בציור. נציין, שיש לשאלה פתרון יחיד.

קל לראות מחשבון שכל צורה חייבת להיות של 3 משבצות. יש שתי אפשרויות עבור צורה כזו: מלבן 3×1 וצורה שנקרא לה "פינה".

אכן, אם נמספר העמודות משמאל לימין א, ב, ... ו, ואת השורות מלמטה למעלה 1, 2, 3, 4 כמו שנהוג בשח, אז רואים שיש רק דרך אחת לכסות את הנקודה במשבצת א2 ע"י צורה של 3 משבצות שלא מכילה נקודות מסומנות אחרות, וזאת צורה שקראנו לה "פינה". זה משאיר רק דרך אחת לכסות את ב1, וזה משאיר דרך יחידה לכסות את ג4 ע"י פינה.

כרגע יש מעט אפשרויות לכסות את ה1 ע"י פינה: או לכסות באותה פינה את ו1 ואת ו2 או את ד1 ואת ד2. במקרה השני לא נצליח לכסות את משבצות ג1 ו-ג2 כי הן מבודדות.

קל לראות שאת מעט המשבצות שנשארו ניתן לכסות בצורה יחידה.

שאלון – כיתות ח'

1. חזקה שלישית של מספר קטנה פי-8 מריבועו . מהו המספר?

תשובה. $\frac{1}{8}$

פתרון. אם $x^3 = x^2/8$ אז $x = \frac{1}{8}$.

2. על הציר מסומנים n נקודות שונות משמאל לימין: $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n$

מצאו את כל הנקודות x על הישר, כך שסכום מרחקים מ- x עד לנקודות $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n$ יהיה קטן ביותר במקרה ש:

א. $n = 2013$ ב. $n = 2014$

תשובות. א. x_{1007}.

ב. כל הנקודות בקטע בין x_{1007} לבין x_{1008} (כולל קצוות).

הסבר.

א. אם x נמצא מימין ל- x_{1007}, כדאי להזיז אותו קצת שמאלה: זה יקטין באורך ההזזה 1007 קטעים, ויאריך (באותו כמות לכל היותר) רק 1006 קטעים. באופן דומה, אם x נמצא משמאל ל- x_{1007}, כדאי להזיז אותו ימינה (מאותה סיבה).

ב. אם x נמצא מימין ל- x_{1008}, כדאי להזיז אותו קצת שמאלה: זה יקטין באורך ההזזה 1008 קטעים, ויגדיל (באותה כמות לכל היותר) 1006 קטעים. כמו כן, אם x נמצא משמאל ל- x_{1007} כדאי להזיזו ימינה מאותה הסיבה. אם x נמצא בין x_{1007} לבין x_{1008}, אז הזזות של x בקטע זה לא ישנו את סכום האורכים: מאריכים 1007 קטעים, ומקצרים 1007 קטעים אחרים באותו האורך.

3. חלקו 20 משקולות של 1 גר', 2 גר', ... , 20 גר' ל-6 ערמות שוות משקל.

תשובה אפשרית.

$(1,14,20)$, $(3,14,19)$, $(2,16,18)$, $(6,12,17)$, $(4,5,10,16)$, $(7,8,9,11)$.

יש עוד הרבה תשובות אפשריות.

כיצד מוצאים את זה? קל לחשב כי

$$1+2+3+4+...+20=(1+20)+(2+19)+(3+18)+...+(10+11)=$$
$$=21+21+...+21=21\cdot 10=210$$

לכן הסכום בכל קבוצה חייב להיות $\frac{21\cdot 10}{6}=7\cdot 5=35$. אחרי זה מרכיבים קבוצות בעלות סכום 35.

4. פתרו את אי-השוויון $[x]\cdot\{x\}<x-1$, כאשר $[x]$ - ערך שלם של x ,
ז"א מספר שלם הגדול ביותר, שלא גדול מ- x, ו- $\{x\}$ - ערך שברי
של x , ז"א $\{x\}=x-[x]$.

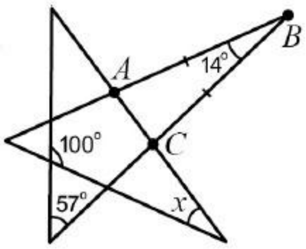
תשובה. $x\geq 2$.

פתרון. אם $[x]\cdot\{x\}<x-1$ אז $[x]\cdot\{x\}<[x]+\{x\}-1$ כלומר

$$[x]\cdot\{x\}-[x]-\{x\}+1<0$$
$$.([x]-1)(\{x\}-1)<0$$

נשים לב כי $\{x\}-1$ תמיד שלילי, כלומר צריך שהגורם האחר $[x]-1$ יהיה חיובי, לכן $[x]>1$, כלומר $x\geq 2$.

5. בסרטוט הבא נתונים גודליהן של שלוש זוויות.
כמו כן, ידוע, כי $AB = BC$. מה גודלה של הזווית x ?

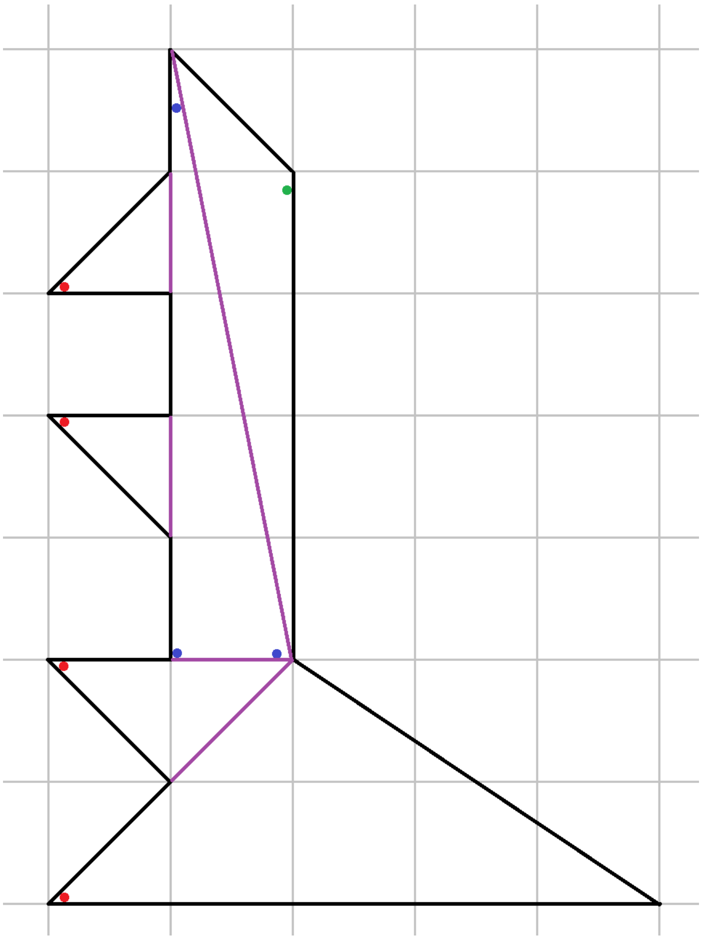


תשובה. 54°**.**
פתרון. התמונה מורכבת ממחומש במרכז ו-3 משולשים
בצדדים שנקרה להם **פינות**.
אחת הפינות זה משולש ABC. במשולש ABC שהוא שווה שוקיים, זווית הראש נתונה והיא 14°, לכן שתי הזוויות האחרות הן 83°.
נתבונן בפינה אחרת של הכוכב: משולש שאחת הזוויות שלו נתונה להיות 57°. נתונה גם הזווית החיצונית: 100°, לכן זווית נוספת היא ההפרש $100^\circ-57^\circ=43^\circ$ (יש עוד זווית של 80° שהיא פחות מעניינת).
נתבונה כרגע בפינה שיש בה זווית שמסומנת x. שתי הזוויות האחרות מופיעות גם בפינות הסמוכות, וכמו שחישבנו הן 83° ו- 43°. הזווית x משלימה את סכומן ל- 180° לפי סכום זוויות במשולש, לכן $x=54^\circ$.

6. נתונים שני מספרים טבעיים x ו-y, כך ש: $12x$ ו-$18y$ הם מספרים ריבועיים.
מהו הערך המינימאלי האפשרי של $x+y$?

תשובה. 5.

פתרון. המינימום עבור x הוא 3. אכן, $12x$ הוא ריבוע שמתחלק ב-3, לכן הוא ריבוע של מספר שמתחלק ב-3, לכן $12x$ מתחלק ב-9, לכן x מתחלק ב-3. לכן x לפחות 3, וקל לראות כי 3 מקיים את התנאי.
באופן דומה $18y$ הוא ריבוע זוגי, לכן הוא ריבוע של מספר זוגי, לכן $18y$ מתחלק ב-4, לכן y מתחלק ב-2. לכן y לפחות 2, וקל לראות כי 2 מקיים את התנאי.
הערך המינימאלי האפשרי של $x+y$ זה לפחות $3+2=5$.



7. מהו מספר המשולשים המינימאלי שאליו ניתן לחתוך את הצורה שבציור:

תשובה: 6.

הסבר. חלוקה ל-6 משולשים מוצגת בתמונה.
השאלה היא האם אפשר פחות. בציור מסומנות 4 נקודות אדומות, כל אחת מהן חייבת להיות במשולש נפרד, הרי הקטעים שמחברים אותם לא לגמרי נמצאים בתוך הצורה. מכאן ברור, שצריכים לפחות 4 משולשים.
כל אחת מבין 3 הנקודות הכחולות צריכה להיות במשולש נפרד מכל נקודה אדומה, מאותה סיבה. מכאן ברור שיש לפחות 5 משולשים בחלוקה. אם רוצים רק 5 משולשים, אז משולש אחד צריך להכיל את 3 הנקודות הכחולות, אבל אז קל לראות שמשולש זה כבר לא יצליח להכיל את הנקודה הירוקה.

8. מכפלתם של כל המחלקים של מספר n כלשהו (כולל המספר n עצמו) היא מספר שמסתיים ב-15 אפסים. מהו מספר האפסים המקסימאלי בו יכול להסתיים המספר n?

פתרון. אם n מסתיים ב-3 אפסים אז הוא מתחלק ב-1000, וגם ב-2, 4, 8, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200, 125, 250, 500 (כלומר בכל המספרים $2^a\cdot5^b$ כאשר $a,b\le3$).
לכן מכפלת המחלקים מתחלקת ב- $2^{4\cdot(1+2+3)}\cdot5^{4\cdot(1+2+3)}=10^{4\cdot6}=10^{24}$ ואז מכפלת המחלקים מסתיימת ב-24 אפסים, שזה מוגזם. לכן n מסתיים ב-2 אפסים לכל היותר. אם $n=400=2^4\cdot5^2$, אז המחלקים הם מספרים מהצורה $2^a\cdot5^b$ כאשר $b\le2$, $a\le4$, כלומר מכפלתם היא $2^{3\cdot(1+2+3+4)}\cdot5^{5\cdot(1+2)}=2^{30}\cdot5^{15}=2^{15}\cdot10^{15}$ שזה מסתיים ב-15 אפסים בדיוק.

9. בטבלה 3×3 סידרו מספרים כלשהם כך שמכפלת המספרים בכל טור של הטבלה שווה ל-1, מכפלת המספרים בכל שורה של הטבלה שווה ל-1, ומכפלת המספרים בכל ריבוע 2×2 שיש בטבלה שווה ל-2. איזה מספר נמצא במשבצת המרכזית של טבלה זו?

תשובה. 16
פתרון. ניקח שני טורים, שמכילים ריבוע 2×2. מכפלת כל 6 המספרים שווה 1 (הרי זו מכפלה של שני טורים), מכפלה בריבוע 2×2 שווה 2, לכן מה שנשאר זה מכפלה של שני מספרים ששווה $\frac{1}{2}$. בשורה עם שני המספרים האלה יש עוד מספר, שמכפלתו ביחד עם שני המספרים שווה 1, לכן בפינה כתוב 2 . טיעון זה חל על כל פינה. לכן בשורה שמכילה את שתי הפינות באמצע השורה כתוב $\frac{1}{4}$, וגם באמצע העמודה שמכילה שתי פינות, כי מכפלה בכל שורה ועמודה זה 1. לכן בעמודה האמצעית רואים $\frac{1}{4}$ ו-$\frac{1}{4}$ בקצוות, ולכן במרכז רשום 16.
קל לראות, שאם מסדרים את הטבלה בצורה שתיארנו, מקבלים שכל התנאים מתקיימים.

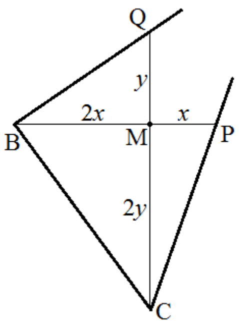
פתרונות – כיתות ט'

1. כמה פתרונות במספרים שלמים חיוביים יש למשוואה $x^2+5xy=5775$?

פתרון. במילים אחרות $x(x+5y)=5775$. אחד הגורמים מתחלק ב-5. אבל ההפרש בין הגורמים הוא $5y$, לכן אם אחד מתחלק ב-5 אז גם השני. נחלק את שני הגורמים ב-5 ואת המכפלה ב-25, ונקבל $z(z+y)=231$, כאשר $z=\frac{x}{5}$.
אז $z(z+y)=21\cdot11=3\cdot7\cdot11$. כל פירוק של $231=3\cdot7\cdot11$ לשני גורמים ייתן הצגה יחידה של $z(z+y)$, כי z זה הגורם הקטן, ו-$z+y$ זה הגורם הגדול, ושני הגורמים אף פעם לא שווים זה לזה שכן 231 אינו ריבוע שלם. לכן התשובה שווה למחצית כמות הגורמים של 231, וכל גורם הוא $3^\alpha\cdot7^\beta\cdot11^\gamma$, כאשר α,β,γ שווים ל-0 או 1. לכן יש $2\times2\times2=8$ מחלקים, ולכן יש 4 פתרונות למשוואה.

2. במשולש ABC נתון כי AB = 8, AC = 6 וכן כי התיכונים מ-B ומ-C מאונכים זה לזה. מצאו את אורך הצלע BC.

תשובה. $\mathrm{BC}=2\sqrt{5}$



פתרון. נגיד כי BP, CQ הם התיכונים, והם נפגשים בנקודה M. כידוע, M מחלק את התיכונים ביחס 1:2, כאשר החלק הארוך סמוך לקודקוד. נסמן $\mathrm{MP}=x$, $\mathrm{MQ}=y$. אזי $\mathrm{MB}=2x$, $\mathrm{MC}=2y$. הישרים BMP, CMQ מאונכים. לפי משפט פיתגורס במשולשים MBQ, MCP מקבלים $3^2=x^2+(2y)^2$, $4^2=(2x)^2+y^2$.

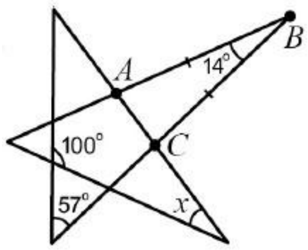
אם נחבר את שתי המשוואות נקבל $25=5\left(x^2+y^2\right)$, כלומר $x^2+y^2=5$.

לפי משפט פיתגורס במשולש MBC, $\mathrm{BC}^2=(2x)^2+(2y)^2=4\left(x^2+y^2\right)=20$.

לכן $\mathrm{BC}=2\sqrt{5}$.

3. בסרטוט הבא נתונים גודליהן של שלוש זוויות.

כמו כן, ידוע, כי $AB = BC$. מה גודלה של הזווית x ?



תשובה. 54°**.**

פתרון. התמונה מורכבת ממחומש במרכז ו-3 משולשים בצדדים שנקרה להם **פינות**.

אחת הפינות זה משולש ABC. במשולש ABC שהוא שווה שוקיים, זווית הראש נתונה והיא 14°, לכן שתי הזוויות האחרות הן 83°.

נתבונן בפינה אחרת של הכוכב: משולש שאחת הזוויות שלו נתונה להיות 57°. נתונה גם הזווית החיצונית: 100°, לכן זווית נוספת היא ההפרש $100^\circ-57^\circ=43^\circ$ (יש עוד זווית של 80° שהיא פחות מעניינת).

נתבונה כרגע בפינה שיש בה זווית שמסומנת x. שתי הזוויות האחרות מופיעות גם בפינות הסמוכות, וכמו שחישבנו הן 83° ו- 43°. הזווית x משלימה את סכומן ל- 180° לפי סכום זוויות במשולש, לכן $x=54^\circ$.

4. מכפלתם של כל המחלקים של מספר n כלשהו (כולל המספר n עצמו) היא מספר שמסתיים ב-15 אפסים. מהו מספר האפסים המקסימאלי בו יכול להסתיים המספר n?

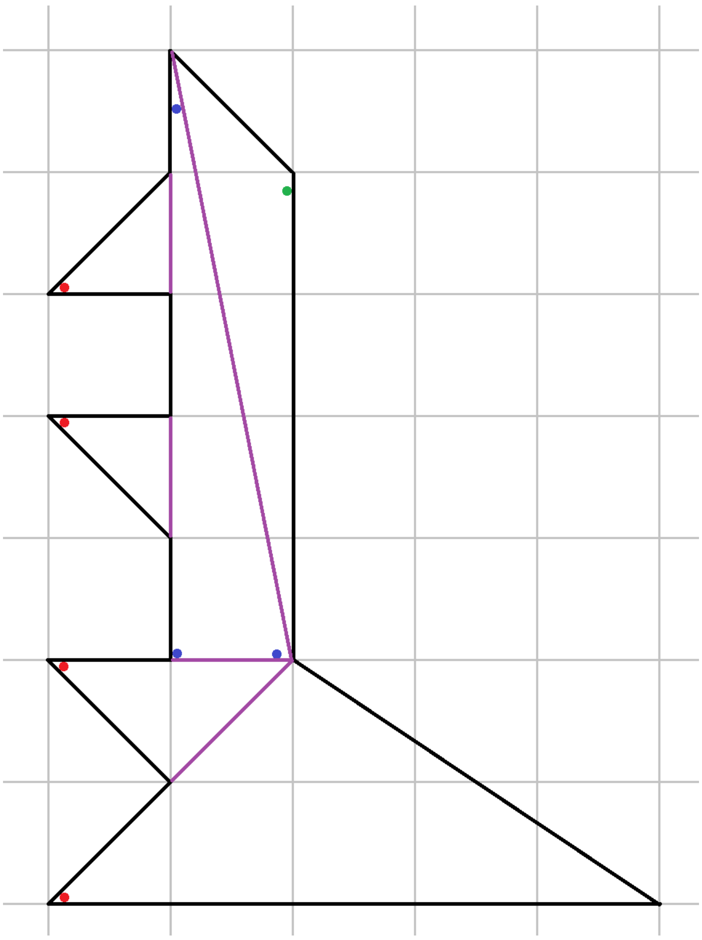
פתרון. אם n מסתיים ב-3 אפסים אז הוא מתחלק ב-1000, וגם ב-2, 4, 8, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200, 125, 250, 500 (כלומר בכל המספרים $2^a\cdot 5^b$ כאשר $a,b\le 3$).
לכן מכפלת המחלקים מתחלקת ב- $2^{4\cdot(1+2+3)}\cdot 5^{4\cdot(1+2+3)}=10^{4\cdot 6}=10^{24}$ ואז מכפלת המחלקים מסתיימת ב-24 אפסים, שזה מוגזם. לכן n מסתיים ב-2 אפסים לכל היותר.אם $n=400=2^4\cdot 5^2$, אז המחלקים הם מספרים מהצורה $2^a\cdot 5^b$ כאשר $b\le 2$, $a\le 4$, כלומר מכפלתם היא $2^{3\cdot(1+2+3+4)}\cdot 5^{5\cdot(1+2)}=2^{30}\cdot 5^{15}=2^{15}\cdot 10^{15}$ שזה מסתיים ב-15 אפסים בדיוק.

5. בטבלה 3×3 סידרו מספרים כלשהם כך שמכפלת המספרים בכל טור של הטבלה שווה ל-1, מכפלת המספרים בכל שורה של הטבלה שווה ל-1, ומכפלת המספרים בכל ריבוע 2×2 שיש בטבלה שווה ל-2. איזה מספר נמצא במשבצת המרכזית של טבלה זו?

תשובה. 16
פתרון. ניקח שני טורים, שמכילים ריבוע 2×2. מכפלת כל 6 המספרים שווה 1 (הרי זו מכפלה של שני טורים), מכפלה בריבוע 2×2 שווה 2, לכן מה שנשאר זה מכפלה של שני מספרים ששווה $\frac{1}{2}$. בשורה עם שני המספרים האלה יש עוד מספר, שמכפלתו ביחד עם שני המספרים שווה 1, לכן בפינה כתוב 2 . טיעון זה חל על כל פינה. לכן בשורה שמכילה את שתי הפינות באמצע השורה כתוב $\frac{1}{4}$, וגם באמצע העמודה שמכילה שתי פינות, כי מכפלה בכל שורה ועמודה זה 1. לכן בעמודה האמצעית רואים $\frac{1}{4}$ ו-$\frac{1}{4}$ בקצוות, ולכן במרכז רשום 16.
קל לראות, שאם מסדרים את הטבלה בצורה שתיארנו, מקבלים שכל התנאים מתקיימים.

6. מהו מספר המשולשים המינימאלי שאליו ניתן לחתוך את הצורה שבציור.

תשובה: 6.



הסבר. חלוקה ל-6 משולשים מוצגת בתמונה.
השאלה היא האם אפשר פחות.
בציור מסומנות 4 נקודות אדומות, כל אחת מהן חייבת להיות במשולש נפרד, הרי הקטעים שמחברים אותם לא לגמרי נמצאים בתוך הצורה.
מכאן ברור, שצריכים לפחות 4 משולשים.
כל אחת מבין 3 הנקודות הכחולות צריכה להיות במשולש נפרד מכל נקודה אדומה, מאותה סיבה. מכאן ברור שיש לפחות 5 משולשים בחלוקה. אם רוצים רק 5 משולשים, אז משולש אחד צריך להכיל את 3 הנקודות הכחולות, אבל אז קל לראות שמשולש זה כבר לא יצליח להכיל את הנקודה הירוקה.

7. את המספר 3 אפשר להציג בארבעה אופנים כסכום של כמה מספרים טבעיים (אולי 1), אם להתחשב בסדר מחוברים: $1+1+1$, $2+1$, $1+2$, 3 .
בכמה אופנים אפשר להציג את המספר 2014 ?

תשובה. 2^{2013}.

פתרון. נחשוב על שורה של 2014 משבצות. בין המשבצות ניתן לצייר קווי הפרדה. סה"כ יש 2013 מקומות שניתן בכל אחד מהם לשים או לא לשים קו הפרדה. סה"כ 2^{2013} אפשרויות לצייר כזה ציור.
כל ציור כזה ייתן חלוקה, המחוברים הם כמויות המשבצות עד קו ההפרדה הראשון, ובין קו הפרדה לקו ההפרדה הבא, ומהקו האחרון עד הסוף.

8. נתונים מספרים טבעיים a, b, c , כך ש- $a<b<c$ וגם $a+b$, $a+c$ ו- $b+c$ הם ריבועים שלמים. מהו ערך המינימאלי של c ?

תשובה. 30.

פתרון. מבין $a+b$, $a+c$ ו- $b+c$ יש 0 או 2 מספרים אי-זוגיים, הרי סכומם זוגי. כל ריבוע גדול מ-1, הרי כל אחד הוא סכום של שני טבעיים, וכל הריבועים שונים, הרי $a+b<a+c<b+c$.

לכן $b+c\geq 25$ (אם $b+c=16$ אז שני הריבועים היותר קטנים הם 9 ו-4 ואז סכומם אי-זוגי).

אם $b+c=25$ אז $a+b, a+c$ חייבים להיות אחד מהם 9 והשני 4 או 16.

נשים לב כי $(a+b)+(a+c)>b+c$, לכן כל האפשרויות האלו לא מתאימות, אפילו $16+9$ אינו עולה על 25.

אם $b+c=36$ אז לא יתכן כי שני הריבועים אחרים הם $25,16$ כי אז רק אחד מהריבועים אי-זוגי. לכן סכום שני הריבועים האחרים הוא לכל היותר $25+9=34$ וזה קטן מ-36 לכן גם זה לא אפשרי.

ובכן, $b+c\geq 49$.

אם $a+b=25$, $a+c=36$, $b+c=49$ אז

$$c=\frac{(b+c)+(a+c)-(a+b)}{2}=\frac{49+36-25}{2}=\frac{60}{2}=30$$

ואז $b=49-c=19$, $a=36-c=6$, וגם $a+b=25$.

זאת אפשרות סבירה.

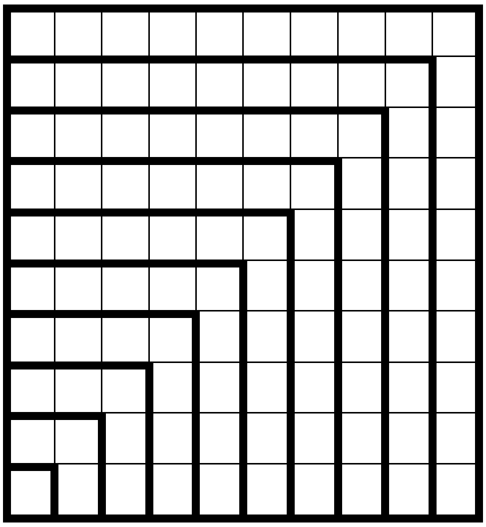
אם $b+c\geq 8^2=64$ אז $c>\frac{64}{2}=32$, וזה פחות טוב. לכן הערך המינימאלי של c מתקבל כאשר $b+c=49$. במקרה זה אם $a+c=36$ אז $a+b$ יכול להיות 25 כמו שראינו, אך לא יכול להיות 16 כי אז יש מספר אי-זוגי של ריבועים אי-זוגיים, ולא יכול להיות גם שום דבר אחר כי הוא חייב להיות גדול מ-$11=49-36$.

אם $a+c\leq 25$ אז $a+b\leq 16$ ואז $(a+b)+(a+c)\leq 41<49$ וזה לא יתכן.

ובכן, אם $b+c=49$ אז יש רק את האפשרות היחידה שמצאנו.

9. חלקו 100 אגוזים ל-10 ערמות שונות בגודלן, כך שאי-אפשר לחלק אף ערמה ל-2 ערמות, כך שכל 11 הערמות יהיו שונות בגודלם.

פתרון. למשל ערמות בגדלים $1,3,5,7,9,11,13,15,17,19$ (כל המספרים האי-זוגיים מ-1 עד 19). עם מחלקים ערמה כלשהי, מייצרים שתי ערמות יותר קטנות, זוגית ואי-זוגית, שאחת מהן כבר קיימת. ניתן לראות שהסכום הזה שווה ל-100 בעזרת הציור.



הערה. החלוקה שהצגנו היא החלוקה היחידה שפותרת את השאלה, אבל קשה להוכיח את זה.