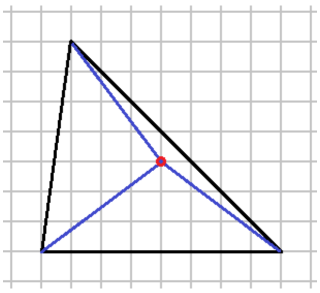
מדינת ישראל
משרד החינוך

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה לתלמידי תיכון

שלב א' - פתרונות

1. דף המשבצות שמופיע בציור מורכב ממשבצות ריבועיות. אורך הצלע של כל משבצת הוא 1. על הדף צויר משולש. מהו רדיוס המעגל החוסם את המשולש?



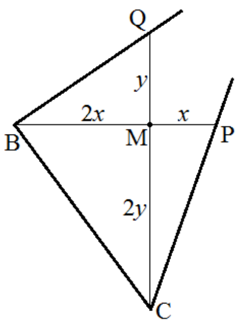
פתרון. נסמן באדום נקודה שנמצאת על האנך האמצעי של הצלע האופקית של הצלע המשופעת ב- 45° ואז רואים שהנקודה במרחק $\sqrt{3^2+4^2}=5$ מכל קודקודי המשולש.

2. כמה פתרונות במספרים שלמים חיוביים יש למשוואה
$x^2+5xy=5775$?

פתרון. במילים אחרות $x(x+5y)=5775$. אחד הגורמים מתחלק ב-5. אבל ההפרש בין הגורמים הוא $5y$, לכן אם אחד מתחלק ב-5 אז גם השני. נחלק את שני הגורמים ב-5 ואת המכפלה ב-25, ונקבל $z(z+y)=231$, כאשר $z=\frac{x}{5}$.

אז $z(z+y)=21\cdot 11=3\cdot 7\cdot 11$. כל פירוק של $231=3\cdot 7\cdot 11$ לשני גורמים ייתן הצגה יחידה של $z(z+y)$, כי z זה הגורם הקטן, ו- $z+y$ זה הגורם הגדול, ושני הגורמים אף פעם לא שווים זה לזה שכן 231 אינו ריבוע שלם. לכן התשובה שווה למחצית כמות הגורמים של 231, וכל גורם הוא $3^\alpha\cdot 7^\beta\cdot 11^\gamma$, כאשר α,β,γ שווים ל-0 או 1. לכן יש $2\times 2\times 2=8$ מחלקים, ולכן יש 4 פתרונות למשוואה.

3. במשולש ABC נתון כי AB = 8, AC = 6 וכן כי התיכונים מ-B ומ-C מאונכים זה לזה. מצאו את אורך הצלע BC.



תשובה. $\mathrm{BC}=2\sqrt{5}$

פתרון. נגיד כי BP, CQ הם התיכונים, והם נפגשים בנקודה M. כידוע, M מחלק את התיכונים ביחס 1:2, כאשר החלק הארוך סמוך לקודקוד. נסמן $\mathrm{MP}=x$, $\mathrm{MQ}=y$. אזי $\mathrm{MB}=2x$, $\mathrm{MC}=2y$. המשולשים הישרים BMP, CMQ מאונכים. לפי משפט פיתגורס במשולשים MBQ, MCP מקבלים $3^2=x^2+(2y)^2$, $4^2=(2x)^2+y^2$.

אם נחבר את שתי המשוואות נקבל $25=5(x^2+y^2)$, כלומר $x^2+y^2=5$.

לפי משפט פיתגורס במשולש MBC, $\mathrm{BC}^2=(2x)^2+(2y)^2=4(x^2+y^2)=20$.

לכן $\mathrm{BC}=2\sqrt{5}$.

4. כל משבצת של ריבוע 4×4 נצבעת באחד משני צבעים, כחול או לבן. הצביעה נקראת מוצלחת אם בכל ריבוע בגודל 2×2 יש בדיוק 3 משבצות באותו צבע (כלומר, 3 לבנות ואחת כחולה או 3 כחולות ואחת לבנה). כמה צביעות מוצלחות שונות קיימות? שתי צביעות נחשבות שונות, אם קיימת משבצת שצבועה בצבע שונה בשתי הצביעות.

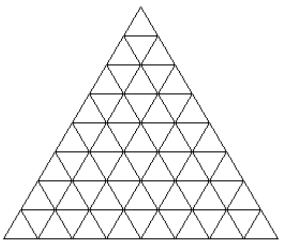
תשובה. $2^7=128$.

פתרון. ננסח מחדש את השאלה: בכל ריבוע בגודל 2×2 יש מספר אי-זוגי של משבצות כחולות.

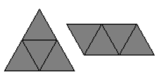
נניח שמישהו כבר צבע עבורנו 7 משבצות: את השורה התחתונה ואת העמודה השמאלית. אנחנו טוענים, שניתן לצבוע את 9 המשבצות האחרות בצורה יחידה, כך שהצביע תהיה מוצלחת.

בכל שלב, נצבע את המשבצת הכי שמאלית מבין המשבצות הכי נמוכות שעוד לא נצבעו. המשבצת שאנו צובעים בכל שלב היא משבצת ימנית עליונה של ריבוע בגודל 2×2. בתוך הריבוע הזה כבר נצבעו 3 משבצות, וזאת המשבצת האחרונה שצובעים, לכן הצבע שלה יקבע בצורה חד משמעית את הזוגיות של כמות המשבצות הכחולות בריבוע 2×2. לכן אם אנחנו רוצים צביעה מוצלחת, אז בכל שלב יש רק דרך אחת לבחור צבע. אם נעשה את הבחירות של 9 המשבצות בצורה כזאת, אכן בכל ריבוע 2×2 יהיה מספר אי-זוגי של משבצות כחולות, הרי לכל ריבוע 2×2 יש פינה ימנית עליונה.

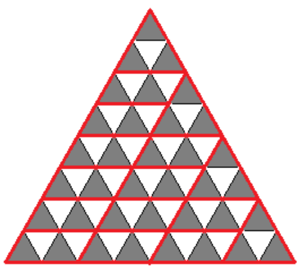
ובכן, אפשר לצבוע את 7 המשבצות של שורה שמאלית ושל עמודה תחתונה בצורה כלשהי, ויהיה אפשר להשלים את זה ביחידות לצביעה מוצלחת. אבל יש בדיוק 2^7 דרכים לצבוע 7 משבצות ב-2 צבעים.



5. בתמונה מצויר לוח משולשי שמורכב מ-64 תאים משולשיים. מנסים לרצף אותו באמצעות מרצפות. כל תא משולשי חייב להיות מכוסה על ידי מרצפת אחת בדיוק. כל מרצפת מכסה 4 תאים בדיוק, וצורתה חייבת להיות משולש או מקבילית (חופפת לאחת הדוגמות).



מהי הכמות הקטנה ביותר של מרצפות בצורת משולש שיכולה להיות בריצוף?



תשובה. 4.

פתרון. פתרון מורכב משני חלקים: צריך להוכיח שאפשר לרצף עם 4 משולשים בלבד, וצריך להוכיח שאי-אפשר עם פחות מ-4. הדוגמה ל-4 בציור (וקיימות עוד הרבה דוגמאות). על מנת להוכיח, שאי-אפשר פחות מ-4, נצבע את המשבצות בצביעת שח: כל שתי משבצות סמוכות בצבעים שחור ולבן שונים זה מזה, ומשבצת פינתית שחורה. כל מרצפת בצורת מקבילית מכסה אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות. כל מרצפת משולשית מכסה שתי משבצות יותר מצבע

אחת מאשר מצבע אחר. בלוח שלנו יש 8 משבצות שחורות יותר מאשר לבנות. לכן צריך לפחות 4 מרצפות משולשיות.

6. מצאו את כל הפתרונות למערכת המשוואות $\begin{cases} xy+xz=54+x^2 \\ yx+yz=64+y^2 \\ zx+zy=70+z^2 \end{cases}$.

תשובה. $(7,8,9)$ או $(-7,-8,-9)$.

פתרון. בצורה אחרת $\begin{cases} x(y+z-x)=54 \\ y(x+z-y)=64 \\ z(x+y-z)=70 \end{cases}$

נסמן $x+y-z=2c \;,\; x+z-y=2b \;,\; y+z-x=2a$.

אז $b+c=x \;,\; a+c=y \;,\; a+b=z$. ומערכת המשוואות היא

$$\begin{cases} (b+c)a=27 \\ (a+c)b=32 \\ (a+b)c=35 \end{cases}$$

סכום כל המשוואות במערכת $2(ab+bc+ca)=94$, כלומר $ab+bc+ca=47$.

נחסיר ממשוואה האחרונה את כל המשוואות במערכת שהייתה לפני זה, ונקבל:

$$\begin{cases} bc=20 \\ ac=15 \\ ab=12 \end{cases}$$

נשים לב, שגם מהמערכת הזאת ניתן לקבל את המערכת שהייתה קודם, כי גם ממנה מתקבל $ab+bc+ca=47$ כאשר מחברים את המשוואות.

במערכת האחרונה נכפיל שני משוואות אחרונות ונחלק בראשונה, ונקבל

$$a^2=\frac{15\cdot 12}{20}=9.$$

לכן $a=\pm 3$.

אם $a=3$ אז $b=\frac{12}{a}=4$, וכן $c=\frac{15}{a}=5$.

אם $a=-3$, באופן דומה $b=-4 \;,\; c=-5$.

קל לבדוק ששני השלשות מקיימות את כל המשוואות (תרגיל לקוראים).

במקרה הראשון $z=3+4=7 \;,\; y=3+5=8 \;,\; x=4+5=9$.

במקרה השני אותו דבר אם סימן הפוך.

7. חודש נקרא **חודש מענג** אם יש בו 5 שבתות. מהו המספר הגדול ביותר של חודשים מענגים שיכול להיות בשנה? מדובר בחודשים של לוח השנה הלועזי. בכל חודש יש לפחות

28 ימים, אך לא יותר מ-31. בשנה יש 365 או 366 ימים. השנה יכולה להתחיל בכל יום בשבוע.

תשובה. 5

פתרון. ניקח לוח שנה, ונמחק מכל חודש 28 ימים רצופים (שזה כולל 4 שבתות). אז בכל חודש מענג תישאר שבת אחת, ובחודש לא מענג לא תישאר שבתות בכלל. לכן כמות החודשים המענגים שווה לכמות השבתות לאחר המחיקה. אבל גם אחרי המחיקה ימות השבוע מסודרים באותו סדר מעגלי.

סה"כ מוחקים $28\cdot 12 = 280 + 56 = 336$ ימים, ולאחר המחיקה במקרה הטוב יישארו $366 - 336 = 30$ ובמקרה הגרוע 29 ימים. לכן עם השנה מתחילה בשבת, יישארו לאחר מחיקה 5 שבתות, אבל בשום אופן לא יישארו 6 שבתות.

נתון ששנה יכולה להתחיל בכל יום, לכן יכולה להתחיל גם בשבת.

8. מצאו את כמות המספרים השלמים החיוביים בעלי 10 ספרות בדיוק, שמתחלקים ב-11 ושכל אחת מספרותיהם היא 5 או 7.

תשובה. 252

פתרון. לפי סימן החלוקה ב-11, מספר מתחלק ב-11 אם ורק אם סכום הספרות במקומות הזוגיים פחות סכום הספרות במקומות האי-זוגיים מתחלק ב-11. נניח שיש a ספרות 7 במקומות הזוגיים, ויש b ספרות 7 במקומות האי-זוגיים. אז סכום הספרות במקומות הזוגיים שווה ל-$5\cdot 5 + 2a$, ובמקומות האי-זוגיים $5\cdot 5 + 2b$, אז ההפרש הוא $2(a-b)$. מכיוון ש-$0 \le a,b \le 5$, מקבלים ש-$a=b$. כלומר אנחנו רוצים שתהיה אותה כמות של שביעיות במקומות הזוגיים והאי-זוגיים. נזכר שהשורה החמישית של משולש פסקל היא

1 5 10 10 5 1

והמספרים מייצגים כמויות של לבחור a שביעיות ב-5 מקומות. התשובה לשאלה היא סכום הריבועים של המספרים האלה, כי צריך לבחור a מקומות ל-7 מקומות מבין 5 מקומות זוגיים ו-a מקומות ל-7 מקומות מבין 5 מקומות אי-זוגיים. לכן יוצא

$$1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2 = 1 + 25 + 100 + 100 + 25 + 1 = 252.$$

9. בתרגיל הכפל הבא כל אות מייצגת ספרה: **מי** × **דלי** = **מיים** . אותיות זהות מייצגות ספרות זהות ואותיות שונות - ספרות שונות. מספר לא יכול להתחיל ב-0.

מצאו את כל האפשרויות עבור הגורם **דלי**.

תשובה. 176 ו-209.

פתרון. הספרה המובילה בשני הגורמים היא **י**, היא לא יכולה להיות 0, אבל גם לא יכולה להיות 4 או יותר, הרי $400\times 40 = 16000$ וזה כבר מספר 5-ספרתי. לכן **י** זה 1, 2 או 3.

אם **י** הוא 3, אז המכפלה היא לפחות $300\times 30 = 9000$, לכן **מ** $= 9$. לכן מקבלים

39 × 3**דל** = 9339.

אבל אפילו $300\times 39 = 9000 + 2700 > 11000$ וזה כבר 5-ספרתי. לכן **י** זה 1 או 2.

לפי סימן חלוקה ב-11, **מיים** מתחלק ב-11, אבל **מי** לא מתחלק ב-11.

לכן **דלי** מתחלק ב-11.

נתבונן בספרת יחידות. **מ** × **ד** מסתיים ב-**מ**. לכן **מ** × (**ד** - 1) מסתיים ב-0, כלומר מתחלק ב-10. לכן אחד הגורמים מתחלק ב-5.

כלומר **מ** הוא 5 או 0, או ש- **ד** הוא 6 או 1.

אבל **מ** לא 0, הרי יש מספר שמתחיל ב- **מ**. נבדוק את 3 המקרים שנשארו:

א. אם **מ** הוא 5, אז המכפלה גם מתחילה ב-5. לכן **י** אינו 1 (אחר המכפלה קטנה מ- $200\times20=4000$), לכן **י** = 2. מקבלים 25 × **דל**2 = 5225, ומקבלים כי **דלי** הוא

$$\frac{5225}{25}=\frac{5000}{25}+\frac{200}{25}+1=200+8+1=209.$$

וזה מתאים: $5225=209\times25$.

ב. אם **ד** הוא 6, אז **מ** בהכרח זוגי, הרי **מ** × (**ד** - 1) מתחלק ב-10.

לכן **מ** הוא 2, 4 או 8 (הרי 6 תפוס, ו-0 לא יכול להיות ספרה ראשונה).

נזכר, שעבור **י** רק שתי אפשרויות: 1 או 2.

לכן לפי סימן חלוקה ב-11, **דלי** הוא 176 או 286.

נקבל **מ**1 × 176 = **מ**11**מ** או **מ**2 × 286 = **מ**22**מ**.

ב1. אם **מ**1 × 176 = **מ**11**מ** אז המכפלה קטנה מ- $4000=200\times20$.

לכן **מ** < 4 כלומר **מ** = 2. לכן $12\times176=2112$, וזה עובד. (לשם בדיקה נחלק את שני האגפים ב-3 ונקבל $4\times176=704$ וזה נכון.)

ב2. אם **מ**2 × 286 = **מ**22**מ** , אז עבור **מ** נשארה רק ספרה זוגית אחת שהיא לא 0 וזה 4. כלומר 24 × 286 = 4224. זה לא יתכן, אפילו $280\times20=5600$ והמכפלה בצד ימין גדולה יותר.

ג. אם **ד** הוא 1. כבר אמרנו כי **י** הוא 1 או 2, אבל 1 כבר תפוס, לכן **י** הוא 2. אבל הרי **דלי** מתחלק ב-11, לכן לפי סימן חלוקה ב-11 חייבים **ל** יהיה 3. ובכן מקבלים

מ2 × 231 = **מ**22**מ**

אם נחסיר **מ**2 משני האגפים נקבל **מ**2 × 230 = **מ**200.

נחלק ב-10 ונקבל **מ**2 × 23 = **מ**20.

לכן **מ**×3 מסתיים ב-0, כלומר מתחלק ב-10, לכן **מ** מתחלק ב-2 וב-5, לכן **מ** הוא 0. זה לא יתכן, כי זו ספרה ראשונה במספר. לכן במקרה האחרון אין תשובה.

10. קוביית סוכר מרחפת באוויר בלי להסתובב. על הקובייה מתיישבים 21 זבובים. הזבובים מגיעים בשלשות, בוחרים בקדקוד כלשהו של הקובייה, ומתיישבים על שלוש הפאות הסמוכות לקדקוד (זבוב אחד על כל פאה). לאחר שכל 21 הזבובים נוחתים, בכמה מצבים שונים הם יכולים להימצא? שני מצבים נחשבים שונים, אם יש פאה שעליה יש מספר שונה של זבובים בשני המצבים.

תשובה. $8^3 = 512$.

פתרון. נחלק את הפאות לשלושה זוגות של פאות מנוגדות: עליונה ותחתונה, צפונית ודרומית, מזרחית ומערבית. בכל פעם, בוחרים פאה אחת מכל זוג. לכן בסוף, יהיו 7 זבובים על כל זוג. אפשר לרשום את 7 בתור $x+y$ כאשר $x, y \geq 0$ ב-8 דרכים.

לכן את הזבובים אפשר לישב ב-8 דרכים על כל זוג של פאות, ולכן בסה"כ יש בדיוק $8\times 8\times 8 = 2^9 = 512$ מצבים.