אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY
27.10.2015

מדינת ישראל
משרד החינוך
יד' בחשון תשע"ו

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'
פתרונות - כיתות ח'

1. דוד רשם על הלוח את כל המספרים הטבעיים בין 1 ל-2015 (כולל).
מה ההפרש בין כמות ספרות ה-"1" הכוללת לכמות ספרות ה-"3" הכוללת שהוא כתב?

<u>פתרון</u>: עבור כל מספר, שדוד כותב בעל הספרה 1, ישנו מספר דומה, שדוד כותב, שדומה לקודם,
רק הספרה 1 מתחלפת בספרה 3 (לדוגמא עבור המספר 516 ישנו המספר 536).
המקרא היחיד, בו זה לא קורה, הוא כאשר ההחלפה גורמת למספר להיות גדול מ-2015.
זה קורה במספרים 1000-1999 עם ה-1 בספרת האלפים ובמספרים 2010-2015
עבור 1 בספרת העשרות. סה"כ ישנן 1006 ספרות 1 כאלה.

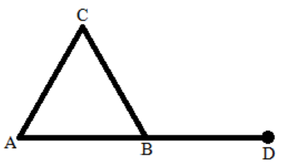
2. נתון מספר דו-ספרתי x. אם מחליפים את סדר ספרותיו, הוא גדל ב-20%. מהו x?

<u>פתרון</u>: נסמן את המחיר הישן $10a + b$, אז המחיר החדש הוא $10b + a$
ולפי הנתון $1.2 \cdot (10a + b) = 10b + a$. מכאן: $a = \frac{4}{5}b$ ואז $a = 4$, $b = 5$.
ז"א המחיר הישן 45 ש"ח.

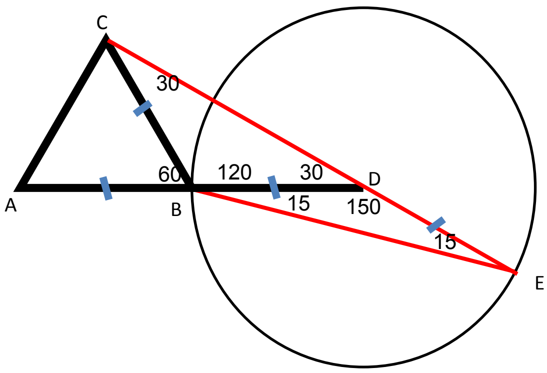
3. מצאו את כל הזוגות של מספרים טבעיים x, y המקיימים $2^x = 4^y - 8^{2015}$.

<u>פתרון</u>: $2^x = 4^y - 8^{2015} = 2^{2y} - 2^{6045} = 2^{6045}(2^{2y-6045} - 1)$
$(2^{2y-6045} - 1)$ חייב להיות חזקה של 2,
וזה מתקיים, רק כאשר $2y - 6045 = 1 \rightarrow y = 3023$
ואז $2^x = 2^{6045} \rightarrow x = 6045$.

4. נתון משולש שווה-צלעות ABC ונקודה D , כך ש-B היא אמצע AD.
נתונה נקודה E, שהיא הרחוקה ביותר מ-C המקיימת $DE = AB$.
מצאו את גודל הזווית BED.



<u>פתרון</u>: נקודה E היא נקודת חיתוך הרחוקה בין מעגל
בעל רדיוס ששווה ל-AB ומרכזו ב-D, לבין ישר CD
(מצד אחד E חייבת להיות על המעגל,
מצד אחר, כל נקודה אחרת על המעגל
קרובה יותר ל-C – אי-שוויון המשולש).
משם, ע"י חישוב בזווית, ניתן לראות,
כי $\measuredangle BED = 15°$.



5. x הוא מספר ארבע-ספרתי, שהוא ריבוע של מספר שלם. בחרו ספרה נוספת, חיסרו אותה מכל
ארבע הספרות של x , וקיבלו מספר ארבע-ספרתי חדש שגם הוא ריבוע של מספר שלם. מצאו את
כל הערכים האפשריים של x .

<u>פתרון</u>: a – המספר המקורי, n - הספרה שהורדנו, b – המספר החדש.
$$a^2 - n(1111) = b^2 \rightarrow (a+b)(a-b) = n(101 \cdot 11)$$

ז"א $(a+b)(a-b)$ חייב להתחלק ב-101 ו-11.

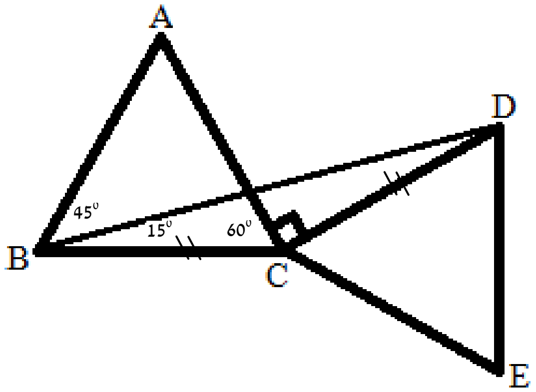
מכאן $a+b=101$, ו- $a-b$ מתחלק ב-11 ו-n.

אם נבדוק את כל המספרים האפשריים, נראה, כי האופציות האפשריות הן:

$a=67 \quad b=34 \quad a=56 \quad b=45$

6. התאריך 15.11.1973 הוא תאריך "אי-זוגי", כיון שכל ספרותיו אי-זוגיות. מגדירים באופן ומה גם תאריכים "זוגיים". מהו הפרש ימים הקטן ביותר האפשרי בין תאריך "זוגי" לתאריך "אי-זוגי"? (**שימו לב!** לפני חודש או יום חד-ספרתי תמיד תהיה הספרה 0. לדוגמא, התאריך 01.01.1999 **אינו** אי-זוגי, כיוון שהספרה 0 היא ספרה זוגית).

__פתרון:__ הפרש שנים הכי קטן שיכול להיות בין שנה זוגית לאי-זוגית הוא 1 בשנים 1999-2000.
לכן ננסה למצוא את התאריך הזוגי הקטן ביותר בשנת 2000: 02.02.2000 והתאריך האי-זוגי הגדול ביותר בשנת 1999: 19.11.1999.
הפרש הימים ביניהם הוא 75 יום.



7. נתון משולש שווה-צלעות ABC. סובבו אותו סביב הנקודה C,
כך ש- $\measuredangle ACD = 90°$ (ראו ציור).
מצאו את גודל הזווית ABD.

__פתרון__: במשולש BCD:

$\measuredangle BCD = 150°\ ,\ BC = CD \ \rightarrow\ \measuredangle DBC = 15°$

$\measuredangle ABD = \measuredangle ABC - \measuredangle DBC = 45°$

8. מצאו את כל המספרים הראשוניים p, כך ש- p^2+14 הוא גם מספר ראשוני.

__פתרון__: נבדוק בחילוק ב-3:

$p \equiv 1 \quad \rightarrow \quad p^2+14 \equiv 0$

$p \equiv 2 \quad \rightarrow \quad p^2+14 \equiv 0$

$p \equiv 0 \quad \rightarrow \quad p^2+14 \equiv 0$

ז"א האופציה היחידה היא כאשר P מתחלק ב-3, וכיוון שהוא ראשוני,

אז $p=3, p^2+14=23$

9. נתונים שישה מספרים טבעיים שונים, שהגדול ביותר מביניהם שווה ל- n. קיים ביניהם בדיוק זוג אחד של מספרים, כך שהמספר הגדול בזוג לא מתחלק במספר הקטן בזוג. מהו הערך הקטן ביותר שיכול לקבל n?

__פתרון__: קל לראות, כי אם $n = 24$, מקבלים קבוצה מתאימה $\{1\ ,2\ ,4\ ,8\ ,16\ ,24\}$ או $\{1\ ,2\ ,4\ ,8\ ,12\ ,24\}$.
נניח, כי אין מספר קטן יותר.

1) מספר n חייב להיות לפחות עם 5 מחלקים (4 מחלקים קטנים מ- n).
מועמדים מתאימים: 20 , 18 , 16 , 12.

2) המחלק הגדול של n (שקטן מ- n) חייב להיות לפחות עם 4 מחלקים: זה פוסל את ה-18.

3) את ה-16 פוסלים, כי בקבוצה חייב להיות מספר נוסף, שמתחלק ב-1 , 2 , 4 , 8,
ואז הוא בהכרח גדול מ-16.

4) את ה-12 ו-20 פוסלים, כי למחלק הגדול שלהם (6 ו-10 בהתאמה) יש בדיוק 4 מחלקים,
ואז חייב להיות מספר נוסף בקבוצה, שמתחלק בהתאמה ב: 1 , 2 , 3 , 6 או

ב-1 , 2 , 5 , 10, ואז הוא בהכרח גדול מ-12 או 20 בהתאמה.
או שמספר נוסף בקבוצה זה המחלק המשותף שלהם 4 והבדיקה מראה, שבמקרה זה תנאים לא מתקיימים.

פתרון 2: ניתן סימונים למספרים בסדר עולה: $a<b<c<d<e<f$.
אם f מתחלק ב- e, וגם e מתחלק ב- d, וגם d מתחלק ב- c, אז וגם c מתחלק ב- b,
אז בכל מקרה $c \geq 3$ (כי $a<b<c$ וכולם מספרים טבעיים),
ולכן $d \geq 2c \geq 6$, ולכן $e \geq 2d \geq 8$, ולכן $f \geq 2e \geq 24$.
לכן במקרה זה בהכרח $f \geq 24$.
נבדוק מקרים אחרים, שהזוג החריג (כלומר הזוג, שבו המספר הגדול לא מתחלק בקטן),
הוא אחד מבין הזוגות (b,c) או (c,d) או (d,e) או (e,f).
נבדוק את 4 המקרים האלה:

(א) אם הזוג החריג הוא (e,f), אז $b \geq 2$ ו- c מתחלק ב- b. לכן $c \geq 4$.
אבל d מתחלק ב- c, לכן $d \geq 2c \geq 8$. בנוסף גם e וגם f מתחלקים ב- d.
אבל $d<e<f$, ולכן $2d \leq e$ וכן $3d \leq f$, לכן $24 \leq f$.
אכן אפשר להגיע ל- $f=24$.
אם הופכים כל אי-שוויון לשוויון:

$$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=4\ ,\ d=8\ ,\ e=16\ ,\ f=24$$

זו דוגמה למצב, שבו רק בזוג (e,f) המספר הגדול מתחלק במספר הקטן.
לכן גם אין צורך להמשיך לדבר על המצב בקודם (שבו הזוגות (c,d) , (d,e), (e,f)
אינם חריגים), כי שם בכל מקרה f היה לפחות 24 ולא היינו יכולים לקבל משהו יותר טוב מהדוגמה שמצאנו במקרה זה.

(ב) נניח, שהזוג החריג הוא (d,e).
אז c שמתחלק ב- b ולכן $b \geq 2$ ולכן $c \geq 4$.
בנוסף, d ו- e מתחלקים שניהם ב- c, אבל $c<d<e$ ולכן $e \geq 3c$.
כמו כן, $f \geq 2e$, כי f מתחלק ב- e ולכן

$$f \geq 2e \geq 2\cdot 3\cdot c \geq 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

לכן אין צורך להמשיך לדבר על מקרה זה, הרי כבר הייתה דוגמה ל- $f=24$ במקרה הקודם.

(ג) אם הזוג החריג הוא (c,d), אז כרגיל $b \geq 2$.
בנוסף c ו- d ומתחלקים ב- b, אבל $b<c<d$, ולכן $d \geq 3b$.
בנוסף, f מתחלק ב- e, שמתחלק ב- d, ולכן בדומה למקרים קודמים

$$f \geq 2e \geq 2\cdot 2d \geq 2\cdot 2\cdot 3b \geq 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2 = 24.$$

לכן גם מקרה זה לא מעניין כבר, כי דוגמה ל- $f=24$ כבר יש לנו ולא נצליח למצוא משהו יותר טוב במקרה זה.

(ד) נשאר מקרה, שהזוג החריג הוא (b,c).
בכל מקרה, $c \geq 3$ כי $a<b<c$ וכולם טבעיים.
לכן $f \geq 2e \geq 4d \geq 8c \geq 8\cdot 3 = 24$.

10. על הלוח רשומים שלושה שברים חיוביים ומצומצמים בעלי מונים שונים, שסכומם 1. התברר, שסכום המספרים ההפכיים לאלו הנתונים הוא מספר טבעי. מצאו דוגמא לשלושה שברים כאלה.

פתרון: מאחר ו- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, אז אפשר לבחור שברים עם מונים 6 , 3 , 2 ומכנה 11 (2 + 3 + 6).
מקבלים דוגמא מתאימה: $\frac{6}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{11}$.