מדינת ישראל
משרד החינוך
יד' בחשון תשע"ו

אוניברסיטת תל-אביב
TEL AVIV UNIVERSITY
27.10.2015

אולימפיאדה ארצית במתמטיקה - שלב א'

פתרונות – כיתות ט'

1. מצאו את כל הזוגות של מספרים טבעיים x, y המקיימים $2^x = 4^y - 8^{2015}$.

פתרון: $2^x = 4^y - 8^{2015} = 2^{2y} - 2^{6045} = 2^{6045}(2^{2y-6045} - 1)$

$(2^{2y-6045} - 1)$ חייב להיות חזקה של 2,

וזה מתקיים, רק כאשר $2y - 6045 = 1 \rightarrow y = 3023$

ואז $2^x = 2^{6045} \rightarrow x = 6045$.

2. על הלוח רשומים 100 מספרים שלמים שונים זה מזה. כמות זוגות המספרים שסכומם אי-זוגי שווה לכמות זוגות המספרים שמכפלתם אי-זוגית. כמה מהמספרים הכתובים על הלוח הם אי-זוגיים?

פתרון: נניח, כי a הוא מספר אי-זוגי ו- b הוא מספר זוגי.

זוג, שסכומו אי-זוגי, הוא סכום של מספר אי-זוגי + מספר זוגי. ישנם $a \cdot b$ זוגות כאלה.

זוג, שמכפלתו אי-זוגית, הוא זוג של מספרים אי-זוגיים. ישנם $\frac{a \cdot (a+1)}{2}$ זוגות כאלה.

לכן: $a \cdot b = \frac{a \cdot (a+1)}{2} \quad \rightarrow \quad 2b - 1 = a$.

או $a = 0$

ומכיוון ש- $a + b = 100 \rightarrow 3b - 1 = 100 \rightarrow b = 33, a = 67$

או $a = 0$, $b = 100$.

3. התאריך 15.11.1973 הוא תאריך "אי-זוגי", כיון שכל ספרותיו אי-זוגיות. מגדירים באופן דומה ומה גם תאריכים "זוגיים". מהו הפרש ימים הקטן ביותר האפשרי בין תאריך "זוגי" לתאריך "אי-זוגי"? (**שימו לב!** לפני חודש או יום חד-ספרתי תמיד תהיה הספרה 0. לדוגמא, התאריך 01.01.1999 **אינו** אי-זוגי, כיוון שהספרה 0 היא ספרה זוגית).

פתרון: הפרש שנים הכי קטן שיכול להיות בין שנה זוגית לאי-זוגית הוא 1 בשנים 1999-2000.
לכן ננסה למצוא את התאריך הזוגי הקטן ביותר בשנת 2000: 02.02.2000 והתאריך האי-זוגי הגדול ביותר בשנת 1999: 19.11.1999.
הפרש הימים ביניהם הוא 75 יום.

4. נתונים שישה מספרים טבעיים שונים, שהגדול ביותר מביניהם שווה ל- n. קיים ביניהם בדיוק זוג אחד של מספרים, כך שהמספר הגדול בזוג לא מתחלק במספר הקטן בזוג. מהו הערך הקטן ביותר שיכול לקבל n?

פתרון: קל לראות, כי אם $n = 24$, מקבלים קבוצה מתאימה $\{24 , 16 , 8 , 4 , 2 , 1\}$
או $\{24 , 12 , 8 , 4 , 2 , 1\}$.
נניח, כי אין מספר קטן יותר.

1) מספר n חייב להיות לפחות עם 5 מחלקים (4 מחלקים קטנים מ- n).
מועמדים מתאימים: 20 , 18 , 16 , 12.

2) המחלק הגדול של n (שקטן מ- n) חייב להיות לפחות עם 4 מחלקים: זה פוסל את ה-18.

3) את ה-16 פוסלים, כי בקבוצה חייב להיות מספר נוסף, שמתחלק ב-1 , 2 , 4 , 8, ואז הוא בהכרח גדול מ-16.

4) את ה-12 ו-20 פוסלים, כי למחלק הגדול שלהם (6 ו-10 בהתאמה) יש בדיוק 4 מחלקים,
ואז חייב להיות מספר נוסף בקבוצה, שמתחלק בהתאמה ב: 1 , 2 , 3 , 6 או
ב-1 , 2 , 5 , 10, ואז הוא בהכרח גדול מ-12 או 20 בהתאמה.
או שמספר נוסף בקבוצה זה המחלק המשותף שלהם 4 והבדיקה מראה, שבמקרה זה תנאים לא מתקיימים.

פתרון 2: ניתן סימונים למספרים בסדר עולה: $a<b<c<d<e<f$.

אם f מתחלק ב-e, וגם e מתחלק ב-d, וגם d מתחלק ב-c, אז וגם c מתחלק ב-b,
אז בכל מקרה $c\ge 3$ (כי $a<b<c$ וכולם מספרים טבעיים),
ולכן $d\ge 2c\ge 6$, ולכן $e\ge 2d\ge 8$, ולכן $f\ge 2e\ge 24$.
לכן במקרה זה בהכרח $f\ge 24$.
נבדוק מקרים אחרים, שהזוג החריג (כלומר הזוג, שבו המספר הגדול לא מתחלק בקטן),
הוא אחד מבין הזוגות (b,c) או (c,d) או (d,e) או (e,f).
נבדוק את 4 המקרים האלה:

(א) אם הזוג החריג הוא (e,f), אז $b\ge 2$ ו-c מתחלק ב-b. לכן $c\ge 4$.
אבל d מתחלק ב-c, לכן $d\ge 2c\ge 8$. בנוסף גם e וגם f מתחלקים ב-d.
אבל $d<e<f$, ולכן $2d\le e$ וכן $3d\le f$, לכן $24\le f$.
אכן אפשר להגיע ל-$f=24$.
אם הופכים כל אי-שוויון לשוויון:

$$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=4\ ,\ d=8\ ,\ e=16\ ,\ f=24$$

זו דוגמה למצב, שבו רק בזוג (e,f) המספר הגדול מתחלק במספר הקטן.
לכן גם אין צורך להמשיך לדבר על המצב בקודם (שבו הזוגות (c,d) , (d,e), (e,f) אינם חריגים), כי שם בכל מקרה f היה לפחות 24 ולא היינו יכולים לקבל משהו יותר טוב מהדוגמה שמצאנו במקרה זה.

(ב) נניח, שהזוג החריג הוא (d,e).
אז c שמתחלק ב-b ולכן $b\ge 2$ ולכן $c\ge 4$.
בנוסף, d ו-e מתחלקים שניהם ב-c, אבל $c<d<e$ ולכן $e\ge 3c$.
כמו כן, $f\ge 2e$, כי f מתחלק ב-e ולכן

$$f\ge 2e\ge 2\cdot 3\cdot c\ge 2\cdot 3\cdot 4=24\ .$$

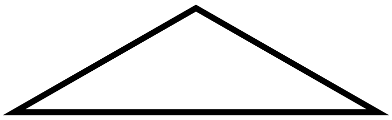
לכן אין צורך להמשיך לדבר על מקרה זה, הרי כבר הייתה דוגמה ל-$f=24$ במקרה הקודם.

(ג) אם הזוג החריג הוא (c,d), אז כרגיל $b\ge 2$.
בנוסף c ו-d ומתחלקים ב-b, אבל $b<c<d$, ולכן $d\ge 3b$.
בנוסף, f מתחלק ב-e, שמתחלק ב-d, ולכן בדומה למקרים קודמים

$$f\ge 2e\ge 2\cdot 2d\ge 2\cdot 2\cdot 3b\ge 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2=24\ .$$

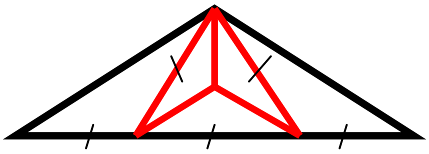
לכן גם מקרה זה לא מעניין כבר, כי דוגמה ל-$f=24$ כבר יש לנו ולא נצליח למצוא משהו יותר טוב במקרה זה.

(ד) נשאר מקרה, שהזוג החריג הוא (b,c).
בכל מקרה, $c\ge 3$ כי $a<b<c$ וכולם טבעיים.
לכן $f\ge 2e\ge 4d\ge 8c\ge 8\cdot 3=24$.



5. נתון משולש שווה-שוקיים עם זווית ראש בת 120°. ציירו חלוקה של המשולש הנתון ל-5 משולשים שכולם דומים לו.

<u>תשובה</u>:



6. באי ביש-מזל ישנם 96 אנשים. הממשלה החליטה לחוקק 5 חוקים חדשים. לכל חוק חדש מתנגדים בדיוק מחצית מתושבי האי. תושב יוצא למחאה חברתית, אם הוא מתנגד ליותר מחצי מהחוקים. מהו המספר המקסימאלי של אנשים, שיכולים לצאת למחאה חברתית?

<u>פתרון</u>: סה"כ מספר ההצבעות (בעד או נגד החוק) ל-5 החוקים הוא $96 \cdot 5 = 480$, מתוחם 240 בעד ו-240 נגד. כדי שיהיו כמה שיותר אנשים שיוצאים למחאה, צריך שכל אדם יצביע לכמה שפחות חוקים נגד. מספר החוקים המינימאלי, שאדם צריך להצביע נגד, כדי לצאת למחאה, הוא 3, וכיוון שיש 240 הצבעות נגד סה"כ, מספר האנשים המקסימאלי שיצאו למחאה הוא $240/3 = 80$.

7. שלושה מספרים חיוביים כתובים על הלוח.
ארבעה אנשים הסתכלו עליהם וטענו את הטענות הבאות. אלה: "המספר הראשון גדול פי-2 מהמספר השלישי". בני: "המספר השני גדול פי-4 מהשלישי". גילה: "סכום המספרים הראשון והשני גדול פי- 5 מהשלישי". דני: "המספר השני פחות המספר הראשון שווה לשלישי".
מבין הדברים שהם אמרו, שלושה היו נכונים ואחד שגוי. חשבו את המנה בין המספר הראשון לבין סכום שני המספרים האחרים.

פתרון ראשון. נסמן ב-a, b, c את שלושת המספרים הרשומים על הלוח בהתאמה. נכתוב אלגברית מה כל אחד מהאנשים טוען:

אלה: $a = 2c$
בני: $b = 4c$
גילה: $a + b = 5c$
דני: $b - a = c$

על מנת להבין מי שוגה, ננתח מה קורה אם נניח שאדם ספציפי טועה.

א. <u>בלי אלה</u>:

$$\begin{cases} b = 4c \\ a + b = 5c \\ b - a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4c \\ a + 4c = 5c \\ 4c - a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4c \\ a = c \\ 4c - a = c \end{cases} \Rightarrow 3c = c \Rightarrow c = 0$$

וזו סתירה, כי נתון שהמספרים שרשומים על הלוח חיוביים.

ב. <u>בלי בני</u>:

$$\begin{cases} a = 2c \\ a + b = 5c \\ b - a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b + 2c = 5c \\ b - 2c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 3c \\ b - 2c = c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{2c}{3c+c} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$$

לכן במקרה זה התשובה היא חצי. נשים לב שזה שלא הגענו לסתירה במקרה זה, לא אומר שפתרנו את השאלה. אמנם הראנו כי ייתכן שבני טועה והשאר צודקים, וקיבלנו תשובה במקרה זה, אולי ייתכן גם שמישהו אחר טועה והשאר

צודקים. לכן על מנת לסיים יש לנתח את שני המקרים הנוספים. אם נשלול את שני המקרים הנוספים נקבל ש-$\frac{1}{2}$ זו התשובה היחידה, אבל אם לא יתכן שיש עוד תשובה.

ג. <u>בלי גילה:</u>

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = 4c \\ b - a = c \end{cases} \Rightarrow 2c = 4c - 2c = b - a = c \Rightarrow c = 0$$

וזו סתירה.

ד. <u>בלי דני:</u>

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = 4c \\ a + b = 5c \end{cases} \Rightarrow 6c = 4c + 2c = a + b = 5c \Rightarrow c = 0$$

וזו סתירה שוב. על כן נסיק שבני באמת האחד שטעה, וכי התשובה הסופית הינה חצי.

פתרון שני. נזכיר שוב את התנאים:

אלה:

בני:

גילה: a

דני: l

נניח כי אלה ובני צודקים, אז $a+b=6c$ ולכן גילה טועה, הרי היא בעצם אומרת כי $6c=5c$ וזה לא יתכן, הרי c חיובי. מצד שני דני אומר בעצם ש-$2c=c$ וזה גם לא יתכן. לכן אם אלה ובני צודקים, אז יש שניים שטועים בניגוד לנתון.

לכן מי שטועה זה אלה או בני, ואפשר לסמוך על מה שגילה ודני אמרו. נחבר את שני המשוואות של גילה ודני, ונסיק כי $b=3c$ בניגוד למה שבני אומר. לכן בני טועה. ולכן אלה צודקת, $a=2c$, ומכאן מחשבים כמו בפתרון הקודם.

8. ביחידה מסוימת, לא יותר מ-1% מהחיילים קיבלו מדים חדשים לכבוד החג. סידרו את החיילים ביחידה בצורת מלבן, כך שאפשר למצוא חיילים במדים חדשים לפחות ב-30% מהשורות ולפחות ב-40% מהטורים. מהו המספר המינימאלי של חיילים שיכולים להיות ביחידה?

<u>**פתרון**</u>: נניח, כי מספר החיילים הכולל הוא n.

מספר החיילים בעלי המדים החדשים הוא לא יותר מ- $\frac{n}{100}$.

אפשר לראות בקלות, שכדי שמספר החיילים יהיה מינימאלי, צריך שמספר החיילים בעלי המדים החדשים יהיה מינימאלי, וכדי שזה יקרה, נניח, שבכל שורה וטור אין יותר מחייל אחד עם מדים חדשים. ז"א מספר השורות/טורים, בהם יש חיילים עם מדים חדשים, הוא מספר החיילים עם המדים החדשים.

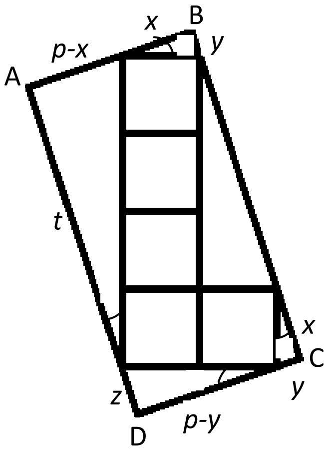
ז"א, אם a הוא מספר השורות ו-b הוא מספר הטורים:

$$\frac{3a}{10} = \frac{n}{100} \quad \rightarrow \quad 30a = n = a \cdot b \quad \rightarrow \quad b = 30$$

$$\frac{4b}{10} = \frac{n}{100} \quad \rightarrow \quad 40b = n = a \cdot b \quad \rightarrow \quad a = 40$$

$$n = a \cdot b = 1200$$

9. בציור מופיעה צורה המורכבת מ-5 משבצות, ומלבן שחוסם אותה. מהו היחס בין צלעות המלבן?



__פתרון 1__: נסמן $AB = p$.

שאר הסימונים רואים בציור.

נשתמש במשפט פיתגורס ודמיון של כל המשולשים שבציור.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{z}{p-y} = \frac{y}{x} \qquad \rightarrow \qquad z = \frac{y(p-y)}{x}$$

$$z^2 + (p-y)^2 = 4$$

אז

$$\frac{y^2(p-y)^2}{x^2} + (p-y)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad (p-y)^2(y^2+x^2) = 4x^2 \quad \rightarrow \quad p-y = 2x$$

ז"א $p = 2x + y$

מצד אחר $\frac{p-x}{t} = \frac{y}{x}$

$$\downarrow$$

$$t = \frac{(p-x)x}{y} = \frac{(x+y)x}{y}$$

מכאן $\frac{(x+y)^2x^2}{y^2} + (x+y)^2 = 16$

או $(x+y)^2 = 16y^2$

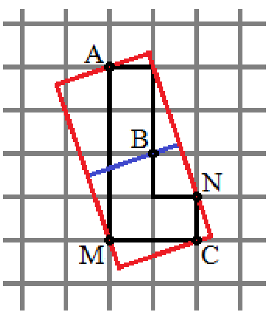
ז"א $x + y = 4y$

אז $x = 3y \quad \rightarrow \quad p = 7y$

מצד אחר $t + z = \frac{4y \cdot 3y}{y} + \frac{y \cdot 6y}{3y} = 12y + 2y = 14y$

קיבלנו $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{7y}{14y} = 1 : 2$

__פתרון 2__: ניתן סימונים כמו בציור: A, M, C, N הם קודקודים של צורת משבצות בסדר זה, כאשר AM היא הצלע הארוכה ו-MC היא צלע באורך 2, ו-B היא אמצע הקטע AC.



על מנת להגיע מ-A ל-B או מ-B ל-C, צריך ללכת משבצת אחת ימינה ושתי משבצות כלפי מטה. על מנת לעבור מ-M ל-N, צריך ללכת שתי משבצות ימינה ומשבצת אחת למעלה.

לכן, אם נסובב את הקטע MN ב- 90° ונזיז אותו, אפשר להעביר את MN או ל-AB או ל-BC, לפי בחירתנו. סיבוב ב- 90° את הצלעות הארוכות של המלבן לישרים מקבילים באותו מרחק, שמקבילים לצלעו הצרות של המלבן.

אם נבצע סיבוב והזזה, שתעביר את MN ל-AB או ל-BC, תנוע זאת תעביר את הצלעות הארוכות של הטרפז לשני ישרים, שאחד מהם הוא צלע קצר של מלבן והשני הוא הישר המקביל דרך B.

לכן מרחק מ-B משני צלעות הקצרות של המלבן שווה לאורך הצלע הקצרה, ולכן הצלע הארוכה של המלבן, שהיא שווה למרחק בין הצלעות הקצרות שלו, גדולה פי-2 מהצלע הקצרה.

10. מצאו את כל השלשות של מספרים שלמים x, y, z המקיימים:

$$\begin{cases} x+y=1-z \\ x^3+y^3=1-z^2 \\ |x|>|y| \end{cases}$$

<u>**פתרון**</u>:

$$\begin{cases} x+y=1-z & (1) \\ x^3+y^3=1-z^2 & (2) \\ |x|>|y| & (3) \end{cases}$$

מתנאי (3) נובע: $|x|>0$

נחלק לכמה מקרים:

1) $y=0$, אז מהתנאים (1), (2) נובע

$$z=1-x \quad \rightarrow \quad x^3=1-(1-x)^2$$

מחלקים ב- $x\neq 0$ ומקבלים שתי תשובות $x_1=1$, $x_2=-2$

אז קיבלנו (1 , 0 , 0)

(-2 , 0 , 3)

2) $x+y=0$ - סתירה לתנאי (3).

3) $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x+y\neq 0$

נחלק משוואה שניה בראשונה ונקבל $x^2-xy+y^2=1+z$ (4)

נעלה (1) בריבוע: $x^2+2xy+y^2=1-2z+z^2$

אז $3xy=z^2-3z$

אם $z=3t$, אז נקבל $xy=3t(t-1)$ (5)

מהמשוואה (4) נובע, כי $z>0$,

אך מהמשוואה (1) נובע, כי $x+y<0$

ומאחר ו- $xy>0$, אז גם $x<0$ וגם $y<0$.

ההנחה, ש- $t=1$, מביאה לסתירה.

ואם $t\geq 3$, אז מהמשוואה (5) נובע, כי או $|x|$ או $|y|$ גדול מ- $\frac{z}{2}$,

ז"א $|x|^3+|y|^3>|1-z^2|$

(כי $5^3>10^2$ והיחס הזה רק הולך ומתחזק).

נותר, כי $t=2$.

קיבלנו שני פתרונות אחרונים (-3 , -2 , 6) , (-2 , -3 , 6),

שרק אחד מהם מתאים ל-(3).

תשובה סופית - שלושה פתרונות אפשריים: (1 , 0 , 0) , (-2 , 0 , 3) , (-3 , -2 , 6) .