

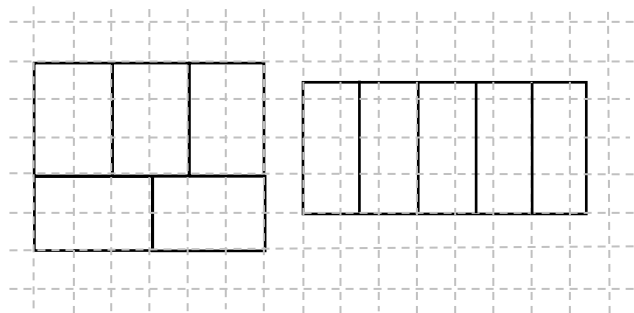
## אולימפיאדת בנו ארבל

### כיתות ט'

1. מצאו מספר ארבע-ספרתי, כאשר רבע ממנו הוא גם מספר ארבע-ספרתי, שמורכב מאותן ספרות הרשומות בסדר הפוך.

פתרון:  $8712 = 2178 \cdot 4$

2. האם אפשר מ-5 מלבנים זהים בעלי היקף 10 להרכיב מלבן אחד עם היקף 22?



פתרון: כן, למשל,

3. בתחרות כדורגל השתתפו 5 קבוצות. כל אחת הייתה אמורה לשחק עם כל אחת אחרת פעם אחת, אך בגלל הקורונה ביטלו מספר חלק מהמשחקים. כתוצאה כל הקבוצות קיבלו מספר שונה של נקודות, אך אף קבוצה לא צברה 0 נק' (על הניצחון נותנים 3 נק', על תיקו – 1 נק', על הפסד – 0 נק'). מהו המספר המינימאלי של משחקים בתחרות?

פתרון: מספר נק' כולל הוא לפחות  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ .

במשחק מחלקים לא יותר מ-3 נק', אז היו לפחות 5 משחקים. אבל 5 לא יכול להיות, כי אז אין תיקו ואין קבוצה עם 1 נק'. אז היו לפחות 6 משחקים.

למשל, כך:

	1	2	3	4	5	נק'
1	X	1	0	0	0	1
2	1	X			1	2
3	3		X			3
4	3			X	1	4
5	3	1		1	X	5

4. כמה מחלקים טבעיים יש למספר

$$201 \cdot 200 \cdot 209 \cdot 210 - 400$$

**פתרון:**

$$\begin{aligned} & (205 - 4)(205 + 4)(205 - 5)(205 + 5) - 400 = \\ & = (205^2 - 16)(205^2 - 25) - 400 = 205^4 - 205^2 \cdot 41 = \\ & = 205^2 \cdot 41(5 \cdot 205 - 1) = 5^2 \cdot 41^3 \cdot 2^{10} \\ & \text{מספר מחלקים: } (2 + 1)(3 + 1)(10 + 1) = 3 \cdot 4 \cdot 11 = 132 \end{aligned}$$

5. מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים  $(x, y)$ , כך ש-  $x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 3$ .

**פתרון:**

$$xy(x + y) - ((x + y)^2 - 2xy) = 3$$

נסמן  $x + y = t$        $xy = v$

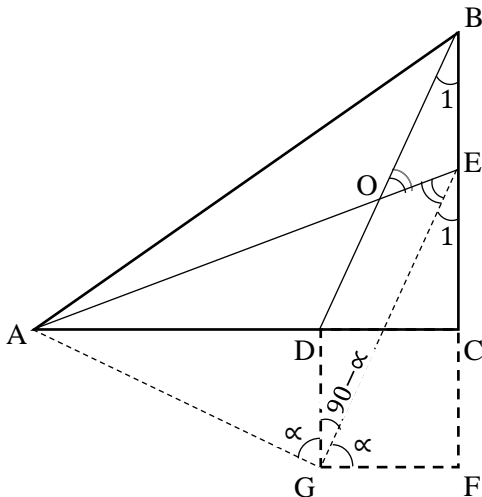
$$tv - t^2 + 2v = 3$$

$$v = \frac{t^2 + 3}{t + 2} = t - 2 + \frac{7}{t + 2}$$

$t + 2 = \pm 1, \pm 7$       מספר שלם

אחרי בדיקה מקבלים  $(x, y) \in \{(1, 4), (4, 1)\}$

6. על ניצב AC של משולש ישר-זווית ABC הקצו קטע AD=BC, ועל ניצב BC הקצו קטע BE=CD. מצאו זווית בין ישרים BD ו-AE.



**פתרון:** נבנה על DC ריבוע DCFG.

$$\triangle ADG \cong \triangle BDC \cong \triangle EGF$$

(כי  $\sphericalangle E_1 = \sphericalangle B_1$ )  $BD \parallel GE$

$$\sphericalangle AGE = 90^\circ$$

אז  $\sphericalangle BOE = \sphericalangle AEG = 45^\circ$

7. בסדרה  $\{x_n\}$  נתון, כי

$$\frac{x_1}{x_1 + 1} = \frac{x_2}{x_2 + 3} = \frac{x_3}{x_3 + 5} = \dots = \frac{x_{1011}}{x_{1011} + 2021}$$

וגם  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1011} = 2022^2$

מצאו את  $x_{1011}$ .

פתרון: נסמן  $\frac{x_k}{x_{k+2k-1}} = a$

$$x_k = ax_k + 2ak - a$$

$$x_k = \frac{a(2k-1)}{1-a}$$

$$x_1 + \dots + x_{1011} = \frac{a}{1-a} (1 + 3 + \dots + 2021) = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{2022 \cdot 1011}{2} = \frac{a}{1-a} \cdot 1011^2 = 2022^2$$

$$\frac{a}{1-a} = 4$$

$$x_{1011} = 4 \cdot 2021 = 8084$$

8. מהו מספר מירבי של פסים בגודל  $1 \times 6$ , שניתן לגזור מדף משובץ  $27 \times 34$  (לפי קווי הרשת)?

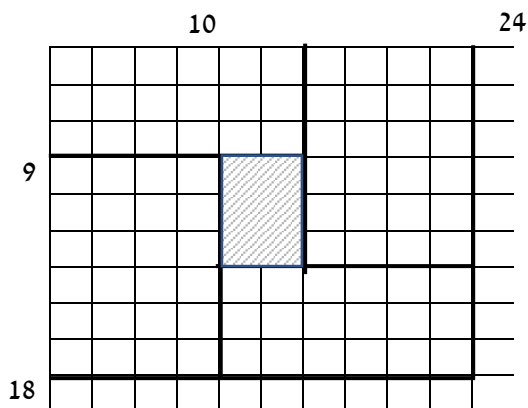
			4				30	
	1	2	3	4	5	6	1	
3	2	3	4	5	6	1		
	3	4	5	6	1			
	4	5	6	1				
	5	6	1					
	6	1						
24	1							

פתרון: יש  $6 \cdot 153$  משבצות,

אבל אי-אפשר לגזור הכל,

כי לפי צביעה ב-6 צבעים במלבן פינתי  $3 \times 4$

אין שוויון צבעים ובשאר הלוח – יש.



השיטה – בציוור השני

פינה  $9 \times 10$

משאירים 6 משבצות.

השאר – ברור.

תשובה: 152