

שלב א' האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'

1. באיזה מספר צריך לחלק את המספר 180, כדי שארית החלוקה תהיה שווה לרבע מהמנה?
(לדוגמה, אם נחלק את 22 ב-5 עם שארית, המנה תהיה שווה ל-4, והשארית תהיה שווה ל-2.)

תשובה: 11

פתרון: נסמן את המספר בו מחלקים ב k , נסמן את השארית ב s . אז המנה שווה ל $4s$. ומתקיים:
 $180 = 4sk + s = s(4k + 1)$
ולכן $s = 4$ ולכן $k = 11$.

2. חוקר ערך ניסוי בו השתתפו 30 עיוורי צבעים. כל אחד מהמשתתפים קיבל 5 כדורים בחמישה צבעים שונים ו-5 קופסאות באותם הצבעים. כל משתתף הניח כדור אחד בכל קופסה. לכל משתתף נספרה כמות הכדורים שהוא הצליח להניח בקופסה בצבע המתאים. לאחר הניסוי הסתבר כי:

- בדיוק ל-3 משתתפים היו 0 הצלחות,
 - בדיוק ל-4 משתתפים הייתה הצלחה אחת,
 - בדיוק ל-4 משתתפים היו שתי הצלחות,
 - בדיוק ל-5 משתתפים היו שלוש הצלחות.
- א. לכמה משתתפים היו ארבע הצלחות?
ב. לכמה משתתפים היו חמש הצלחות?

תשובה: א. 0 ב. 14

פתרון: נשים לב כי לא ייתכן שלמשתתף היו בדיוק 4 הצלחות כי אם הוא שמ 4 כדורים במקום הנכון אז המקום היחיד שנותר לכדור החמישי הוא המקום הנכון עבורו ואז היו למשתתף זה 5 הצלחות. ולכן לכל המשתתפים שלא היו להם בין 0 ל-3 הצלחות יהיו 5 הצלחות.

3. בספר המפורסם "שלושת המוסקטרים" מתקיימת השיחה הבאה

אתוס: "בואו נספור כמה כסף יש לכולנו יחד"

פורתוס: "לי יש 30 אקיו"

אראמיס: "אצלי 10 פיסטולים"

ד'ארטאניאן: "אצלי 25 פיסטולים. אז סך הכל יש לנו 475 ליברות"

אתוס: "ד'ארטאניאן! אתה מחשב מהר כמו ארכימדס!"

בהנחה שאף אחד מהם לא טעה, ענו על השאלה הבאה:

כמה ליברות בפיסטול אחד וכמה ליברות באקיו אחד, אם נתון שיחסי ההעברה הם בשלמים, ופיסטול שווה יותר מאקיו?

(הערה: פיסטול, אָקיו וליבְרָה הם מטבעות צרפתיים מתקופה של מאה שבע עשרה.)

תשובה: פיסטול שווה 11 ליברה ואקיו שווה 3 ליברה

פתרון: נסמן את ערכו של פיסטול ב a ואת ערכו של אקיו ב b . אזי מתקיים
 $30b + 35a = 475$. נחלק ב 5 ונקבל $6b + 7a = 95$. פיסטול שווה יותר מאקיו ולכן
 $a - b$ חיובי. נכתוב את המשוואה כך $13b + 7(a - b) = 95$. ולכן b הוא בין 1 ל 7.
אבל צריך ש $95 - 13b$ יתחלק ב 7 וזה שקול לכך ש $4 + b$ יתחלק ב 7 ולכן $b = 3$ ואז
 $a = 11$.

4. נתבונן במספרים שלמים חיוביים בעלי התכונה הבאה: אם נחסיר מהמספר 9, סכום ספרותיו יגדל פי 2017. מצאו את המספר הקטן ביותר בעל התכונה הזאת.

תשובה: 10^{225}

פתרון: תחילה נשים לב כי 10^{225} עובד, סכום הספרות שלו הוא 1 ואם נחסיר ממנו 9 נקבל מספר עם 224 תשעיות ואחד בסוף. סכום הספרות של מספר זה הוא $9 \cdot 224 + 1 = 2017$.
עכשיו נראה שלא יתכן מספר קטן יותר. אם סכום הספרות של המספר שלנו הוא לפחות 2 אז אם נחסיר ממנו 9 נקבל מספר שסכום ספרותיו לפחות 4034. וזה אומר שהמספר הוא לפחות $10^{\frac{4034}{9}} - 1$ וזה כבר גדול יותר מהמספר שמצאנו.
אם סכום הספרות של המספר הוא 1 אז המספר הוא מהצורה 10^n וזה אומר כי אם נחסיר ממנו 9 סכום הספרות של המספר שנקבל יהיה $9(n - 1) + 1$. על מנת שמספר זה יהיה שווה ל 2017 חייב להתקיים כי $n = 225$.

5. במשולש ABC נתון כי $\angle C = 3\angle A$ וכי $AB = 2BC$. מצאו את זווית $\angle B$.

תשובה: 30° .

פתרון: נסמן ב D את אמצע AB. ונסמן $\angle A = \alpha$. אזי $\angle B = 180^\circ - 4\alpha$. משולש CBD שווה שוקיים ולכן $\angle CDB = 2\alpha$. מצד שני $\angle CDB$ זווית חיצונית במשולש ADC ולכן
 $\angle CDB = \angle A + \angle ACD$ או $2\alpha = \alpha + \angle ACD$. כלומר $\angle ACD = \alpha$. ולכן המשולש ADC גם שווה שוקיים. כלומר $AD = DC$. אבל $AD = DB$ ולכן המשולש DBC שווה צלעות ולכן
 $\angle A = 30^\circ$ או $2\alpha = 60^\circ$.

6. נתונים שלושה שקים זהים. שק אחד מכיל 100 כדורים לבנים, שק שני מכיל 100 כדורים שחורים, שק שלישי מכיל 50 לבנים ו-50 שחורים. בן רוצה לגלות מה נמצא בכל שק. לצורך כך, הוא מוציא משק לבחירתו כדור אקראי ומסתכל על הצבע שלו. הוא חוזר על הפעולה עד שהוא יודע

מה נמצא בכל שק. הוא מוכן לבצע את הפעולה הזאת לא יותר מ- N פעמים. מה הוא הערך המינימלי של N עבורו בן בטוח יוכל לגלות מה נמצא בכל שק?

תשובה: 53

פתרון: קודם נראה כיצד זה אפשרי עם 53 כדורים. תחילה נוציא כדור אחד מכל שק. יהיו 2 כדורים מאותו צבע וכדור נוסף בצבע השני. השק המכיל אחד משני הכדורים חייב להיות אחד משני השקים מהם הוצאו כדורים באותו צבע. ולכן השק אשר ממנו הוצא הכדור בצבע השני חייב להכיל כדורים רק מצבע אחד. כעת נותר לנו להבין רק מי משני השקים שנותרו מכיל כדורים רק מצבע אחד וכדי לעשות זאת מספיק לנו להוציא עוד 50 כדורים מאחד השקים שנותרו.

עכשיו נראה כי אי אפשר לעשות זאת עם פחות כדורים. נניח שהשק הראשון שבן מוציא ממנו כדור הוא שק שמכיל רק כדורים לבנים, ונניח שהשק השני ממנו הוא מוציא כדור מכיל רק כדורים שחורים. אם בן לא יוציא אף כדור מהשק השלישי ידרשו לו 102 כדורים כדי לוודא את זהות השקים. אם הוא יוציא כדור מהשק השלישי אז הוא כבר הוציא 3 כדורים אבל קיימים 2 שקים שיכולים להתנהג אותו הדבר אלא אם כן יוציא מאחד מהם עוד 50. וזה כבר 53 כדורים.

7. אבי נוסע ברכבת שמהירותה 60 קמ"ש ומסתכל בחלון. הוא מבחין ברכבת אחרת שנוסעת בכיוון המנוגד לרכבת בה הוא נמצא. הרכבת חולפת על פני אבי תוך 4 שניות בדיוק. מצאו את מהירותה, אם ידוע שאורכה 120 מטרים.

תשובה: 48 קמ"ש או $\frac{40}{3}$ מטר לשנייה.

פתרון: נסמן את מהירותה של הרכבת השנייה ב v .

מהירות הרכבת שאבי נמצא בה היא 60 קמ"ש. נעביר זאת למטרים בשנייה ונקבל שמהירותה היא $60 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{50}{3}$.

מנקודת מבטו של אבי הרכבת שהוא רואה נוסעת במהירות $v + \frac{50}{3}$. ולוקח לה 4 שניות לחלוף על פניו ולכן אורכה הוא $4 \left(v + \frac{50}{3} \right) = 120$. ולכן $12v + 200 = 360$ או $v = \frac{40}{3}$. נחזור לקמ"ש ונקבל כי מהירות הרכבת היא $\frac{40}{3} \cdot \frac{3600}{1000} = 48$ קמ"ש.

8. נתונות 17 קופסאות גדולות ריקות. בוחרים מתוכן מספר קופסאות ומכניסים לכל אחת מהן 20 קופסאות ריקות בגודל בינוני. אחרי זה בוחרים כמה מהקופסאות הבינוניות ומכניסים לכל אחת מהן 20 קופסאות קטנות. הסתבר שבסך הכל יש 2017 קופסאות. כמה מתוכן ריקות?

תשובה: 1917

פתרון: כל פעם שנוספו 20 קופסאות קופסה ריקה אחת נהפכה למלאה. בסך הכל נוספו 2000 קופסאות. כלומר 100 פעם קופסה נהפכה למלאה ולכן נותרו $100 - 2017$ קופסאות ריקות.

9. מצאו שלושה מספרים שלמים חיוביים עוקבים שקטנים מ-100, כך שלכולם אותה כמות מחלקים.

תשובה: 33,34,35

פתרון: ננסה למצוא פתרון שבו כל המספרים הוא מכפלה של זוג ראשוניים שונים. מבין שלושה מספרים עוקבים או ששניים מהם מתחלקים ב-2 או שבדיוק אחד מהם. אם 2 מתחלקים ב-2 אז אחד מהשלושה מתחלק ב-4. ואז הוא לא יכול להיות מכפלה של זוג ראשוניים. ולכן יש מספר זוגי אחד והוא 2 כפול מספר ראשוני. נרשום את המספרים הראשוניים מצורה זו, 6,10,14,22,26,34. קל לראות ש 34 הוא המספר הראשון שעובד.