שלב א' האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט'

1. שני שחיינים מתאמנים בבריכה שאורכה 50 מטרים. כל אחד מהם שוחה הלוך וחזור לאורך הבריכה במהירות קבועה וללא עצירות, ומהירותם של השחיינים שונה. שניהם התחילו בו-זמנית באותו הצד של הבריכה. כשאר שחיין מסיים קילומטר של שחייה, הוא יוצא מהבריכה. ידוע כי השחיינים מעולם לא נפגשו בקצה הבריכה. כמה פעמים חלפו השחיינים אחד על פני השני, לא כולל רגע התחלה של השחייה?

תשובה: 19

פתרון: נתבונן בשחיין המהיר יותר. נגדיר- מסלול מתחילת הבריכה לסופה זהו "מסלול".
ברור כי בכל מסלול, השחיין המהיר יפגוש את השחין האיטי בדיוק פעם אחת, כי נתון שמהירותם קצובה. כדי להשלים את התחרות, על השחקנים לעשות 20 מסלולים. כמו כן, במסלול הראשון, השחין המהיר לא פגש את האיטי אף לא פעם אחת, מפני שהם יצאו מאותה הנקודה. אם הם לא יפגשו בשום קצה אחר, אזי בכל 19 המסלולים שלשחין המהיר נותרו לעשות הוא יפגוש את האיטי.

2. באיזה מספר צריך לחלק את המספר 180, כדי שארית החלוקה תהיה שווה לרבע מהמנה?
(לדוגמה, אם נחלק את 22 ב-5 עם שארית, המנה תהיה שווה ל-4, והשארית תהיה שווה ל-2.)

תשובה: 11

פתרון: נסמן את המספר בו מחלקים ב k, נסמן את השארית ב s. אז המנה שווה ל $4s$. ומתקיים:
$180 = 4sk + s = s(4k+1)$. $180 = 9 \cdot 5 \cdot 4$. s חייב להתחלק ב4 ולהיות קטן יותר מ k
ולכן $s = 4$ ולכן $k = 11$.

3. נתונים שלושה שקים זהים. שק אחד מכיל 100 כדורים לבנים, שק שני מכיל 100 כדורים שחורים, שק שלישי מכיל 50 לבנים ו-50 שחורים. בן רוצה לגלות מה נמצא בכל שק. לצורך כך, הוא מוציא משק לבחירתו כדור אקראי ומסתכל על הצבע שלו. הוא חוזר על הפעולה עד שהוא יודע מה נמצא בכל שק. הוא מוכן לבצע את הפעולה הזאת לא יותר מ- N פעמים. מה הוא הערך המינימלי של N עבורו בן בטוח יוכל לגלות מה נמצא בכל שק?

תשובה: 53

פתרון: קודם נראה כיצד זה אפשרי עם 53 כדורים. תחילה נוציא כדור אחד מכל שק. יהיו 2 כדורים מאותו צבע וכדור נוסף בצבע השני. השק המכיל אחד משני הכדורים חייב להיות אחד משני השקים מהם הוצאו כדורים באותו צבע. ולכן השק אשר ממנו הוצא הכדור בצבע השני חייב להכיל כדורים רק מצבע אחד. כעת נותר לנו להבין רק מי משני השקים שנותרו מכיל כדורים רק מצבע אחד וכדי לעשות זאת מספיק לנו להוציא עוד 50 כדורים מאחד השקים שנותרו.

עכשיו נראה כי אי אפשר לעשות זאת עם פחות כדורים. נניח שהשק הראשון שבן מוציא ממנו כדור הוא שק שמכיל רק כדורים לבנים, ונניח שהשק השני ממנו הוא מוציא כדור מכיל רק כדורים שחורים. אם בן לא יוציא אף כדור מהשק השלישי ידרשו לו 102 כדורים כדי לוודא את זהות השקים. אם הוא יוציא כדור מהשק השלישי אז הוא כבר הוציא 3 כדורים אבל קיימים 2 שקים שיכולים להתנהג אותו הדבר אלא אם כן יוציא מאחד מהם עוד 50. וזה כבר 53 כדורים.

4. נתונות 17 קופסאות גדולות ריקות. בוחרים מתוכן מספר קופסאות ומכניסים לכל אחת מהן 20 קופסאות ריקות בגודל בינוני. אחרי זה בוחרים כמה מהקופסאות הבינוניות ומכניסים לכל אחת מהן 20 קופסאות קטנות. הסתבר שבסך הכל יש 2017 קופסאות. כמה מתוכן ריקות?

תשובה: 1917

פתרון: כל פעם שנוספו 20 קופסאות קופסה ריקה אחת נהפכה למלאה. בסך הכל נוספו 2000 קופסאות. כלומר 100 פעם קופסה נהפכה למלאה ולכן נותרו $2017 - 100$ קופסאות ריקות.

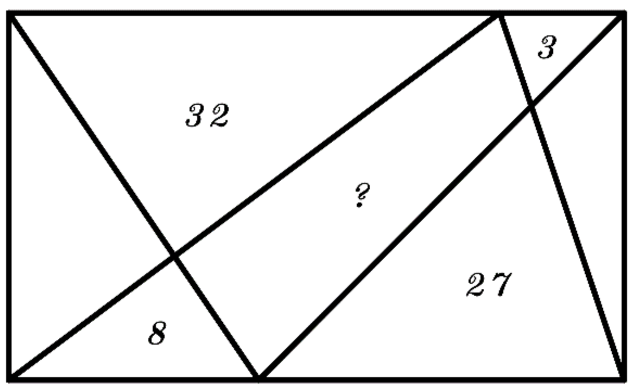
5. מצאו שני מספרים שלמים חיוביים עוקבים שקטנים מ-120, כך לכל אחד מהם בדיוק 8 מחלקים.

תשובה: 104,105

פתרון: אם למספר יש בדיוק 8 מחלקים אז יש רק 3 אפשרויות. המספר חייב להיות מאחת הצורות הבאות: pqr, pq^3, p^7 כאשר p, q, r ראשוניים.

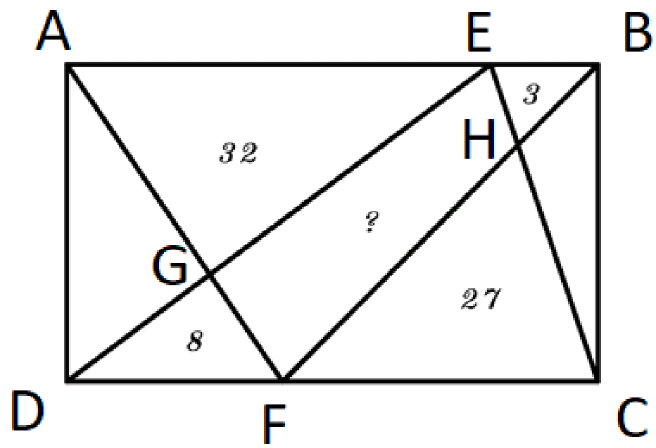
זה מצמצם את החיפוש. מהמספרים מהצורה האחרונה רק 2^7 בטווח, מספרים מהצורה השנייה חייבים להיות כפולה בראשוני של 8 או של 27. מספרים מהצורה הראשונה יש הרבה, אבל מצד שני כדי ששניים צמודים יהיו מהסוג הראשון צריך ש13 או ראשוני גדול יותר יופיע כאחד הגורמים. אין אף זוג כזה כי הראשוניים הכי קטנים הם 2,3,5,7,11,13. המספר שמתחלק בלפחות 13 צריך להיות קטן מ150 ולכן 2 הראשוניים האחרים שהוא מתחלק בהם הם 2,3 או 2,5. ואז המספר השני הוא לפחות $5 \cdot 7 \cdot 11 = 155$, סתירה. ולכן לפחות אחד מהמספרים הוא מהצורה השנייה ולכן צריך לבדוק את השכנים של: 24,40,56,88,104,54.

6. בציור מלבן שהועברו בו מספר קווים. נתונים השטחים של ארבעה מהמשולשים שנוצרו בתהליך הזה (ראו ציור). מהו השטח של המרובע האמצעי שמסומן בסימן שאלה?



תשובה: 25

פתרון: נסמן נקודות



נשים לב כי המשולשים AGE, FGD דומים (כי צלעות המלבן מקבילות). יחס השטחים הוא 4 ולכן יחס הדמיון הוא 2. ולכן $\mathrm{AE} = 2\mathrm{DF}$. גם המשולשים FHC, DHE דומים והפעם יחס הדימיון הוא 3. ולכן $\mathrm{FC} = 3\mathrm{EB}$. צלעות המלבן שוות ולכן $\mathrm{DF} + 3\mathrm{EB} = 2\mathrm{DF} + \mathrm{EB}$ ולכן $\mathrm{DF} = 2\mathrm{EB}$. ולכן $\mathrm{DC} = 5\mathrm{EB}$. נסמן את אורך הגובה של המשולש DGF אשר יוצא מ G ב h. מדמיון משולשים אורכו של הגובה מ G ל AE הוא $2h$. ולכן $\mathrm{AD} = 3h$.

$h \cdot DF = 2S_{DGF} = 16$ ולכן $\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DC} = 3h \cdot 5BE = 7.5h \cdot DF = 120$.

השטח של המשולש DEC הוא חצי מהשטח של המלבן(כי אם נעביר מE אנך לDC נקבל שני מלבנים שני חלקים של המשולש DEC אשר כל אחד מהם הוא חצי ממלבן).

ולכן השטח של המשולש DEC הוא 60 ולכן השטח שרצינו למצוא הוא 25.

7. נתונים x, y, z מספרים שלמים, עבורם מתקיים: $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

נסמן $M = (x-y)(z-x)$. איזה ערכים בין -10 לבין 10 M יכול לקבל?

תשובה: $0, -1, -4, -9$

פתרון: נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל

$$x - y + z = x + y + z - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz}$$
$$2y + 2\sqrt{xz} = 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz}$$
$$y + \sqrt{xz} = \sqrt{xy} + \sqrt{yz}$$

נעלה שוב בריבוע ונקבל

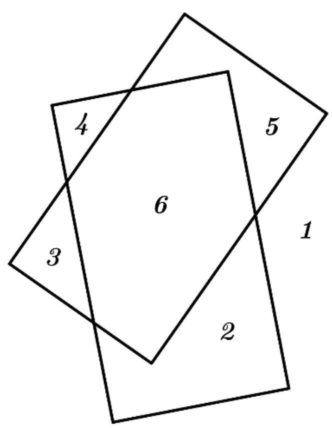
$$y^2+xz+2y\sqrt{xz}=xy+yz+2y\sqrt{xz}$$
$$y^2+xz-xy-yz=0$$
$$(y-x)(y-z)=0$$

לכן $y=z$ או $x=y$. אם $x=y$ אז $M=0$.

אם $y=z$ אז $\mathrm{M}=-(x-y)^2$ ולכן שאר האופציות הן $\mathrm{M}=0,-1,-4-9$. באמת ניתן לקבל אותן כי אם $y=z=0$ המשוואה מתקיימת ו$\mathrm{M}=-x^2$. בפרט עבור הבחירות $x=0,1,2,3$ נקבל את הנדרש.

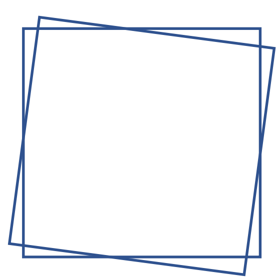
8. מה הוא המספר המרבי של חלקים עליהם ניתן לחתוך מישור באמצעות חמישה מלבנים?

(דוגמה: מציור שני מלבנים מחלקים את המישור ל-6 חלקים.)

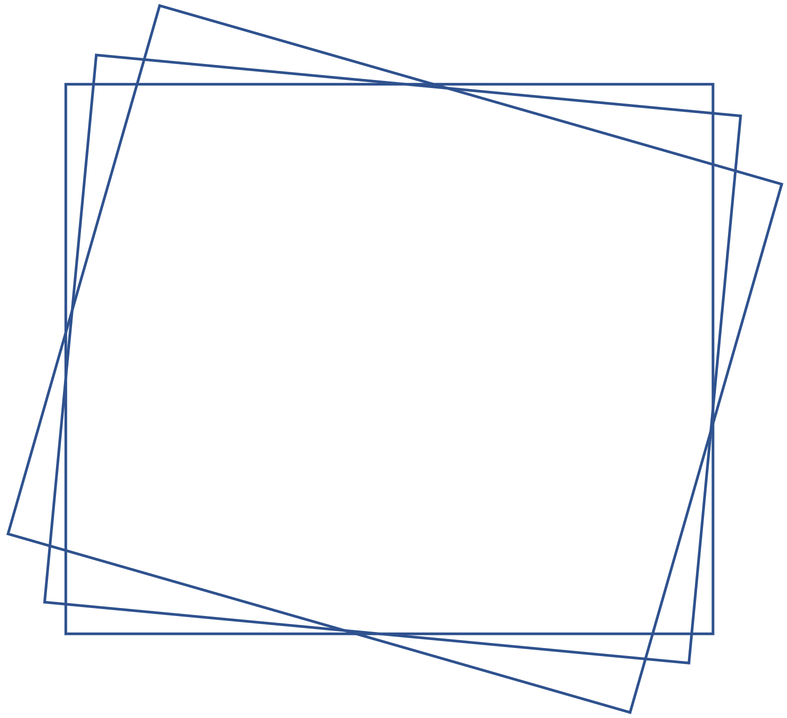


תשובה:82

פתרון: נשים לב כי אם יש לנו מלבן אחד. כאשר אנו מוסיפים מלבן אז הוא יוצר לכל היותר 8 חלקים חדשים. כמו בציור:



נניח שיש לנו n מלבנים ואנחנו מוסיפים עוד מלבן אז כל שטח חדש שנוצר חייב לקיים שחלק מהשפה שלו שייך למלבן החדש שהוספנו. כמות השטחים האלו היא לכל היותר 8 כפול מספר המלבנים שהיו קודם. ולכן אנחנו מקבלים חסם של לכל היותר 8 כפול כמות זוגות המלבנים ועוד 2. כלומר $8\frac{n(n-1)}{2}+2=4n(n-1)+2$. עכשיו נשאר להראות שחסם זה בר השגה. ניקח n ריבועים אחד על השני ונסובב כל אחד בזווית קטנה סביב המרכז המשותף שלהם.



נסתכל אילו שטחים קיבלנו. יש את השטח הפנימי והשטח החיצוני. ובנוסף ליד כל פינה יש שטחים בתוך הריבוע שלא סובבנו בכלל ושטחים מחוץ לריבוע שלא סובבנו בכלל. אם היו n ריבועים ונוסף עוד ריבוע אז זה מוסיף עוד n שטחים שנמצאים ליד פינה ספציפית ולא בתוך הריבוע שלא סובב. כי הריבוע הזה חותך את כל אחד מהריבועים שהיו קיימים פעם אחת האזור זה וכל חיתוך כזה מוסיף עוד שטח אחד. ולכן בסך הכל נוספים $8n$ שטחים. וזה נותן באינדוקציה את החסם שהוכחנו. בפרט עבור $n = 5$ מקבלים 82.