אולימפיאדה ראשונה ע"ש בנו ארבל ז"ל

כיתות ז'

1. a,b הם שני מספרים טבעיים שונים. סכום המחלקים של כל אחד מהם שווה לאותו מספר טבעי n. מהו הערך הקטן ביותר האפשרי של n?

תשובה. 12.

פתרון. למשל סכום מחלקי 6 זה $1+2+3+6=12$, וגם סכום מחלקי 11 זה $1+11=12$. אם היה מספר יותר קטן מ-12, אז זה סכום מחלקים של מספרים a,b שקטנים ממש מ-11.

נרשום את כל המספרים עד 10 וסכום ספרותיהם בטבלא. אף סכום ספרות לא חוזר פעמיים, לכן n לא יכול להיות קטן מ-12.

1	2
2	3
3	4
4	7
5	6
6	12
7	8
8	9
9	13
10	18

2. למרים יש מטבעות של שני שקלים ושל 5 שקלים. אם היא תשלם רק במטבעות של 2 שקלים, יהיו חסרים לה 60 שקל לקניית 4 עוגות. אם היא תשלם רק במטבעות של 5 שקלים, יהיו חסרים לה 60 שקל לקניית 5 עוגות. בסה"כ חסרים לה 60 שקל לקניית 6 עוגות. כמה עולה עוגה?

תשובה. 20.

פתרון. נניח שהסכום במטבעות של 2 שקל הוא b ובמטבעות של 5 שקל הוא e. עלות העוגה u. אזי

$$b=4u-60$$

$$e=5u-60$$

$$b+e=6u-60$$

מצד שני, אם נחבר את שתי המשוואות הראשונות, נקבל $b+e=9u-120$.

לכן $6u-60=9u-120$, כלומר $60=3u$, כלומר $u=20$.

3. נתון ישר ℓ ושתי נקודות A,B במרחקים שונים מהישר. מצאו על הישר את הנקודה C עבורה ההפרש בין אורכי הקטעים BC,AC הוא הגדול ביותר.

פתרון. הפתרון מתחלק לשני מקרים.

אם A,B באותו צד של ℓ נעביר ישר דרכם, שיחתוך את ℓ בנקודה C, וזו תהיה הנקודה. אכן, בנקודה זו יתקיים כי $|AC-BC|=AB$ ובכול נקודה אחרת X על ℓ יתקיים $|AX-BX|<AB$ לפי אי-שוויון המשולש.

אם A,B בצדדים שונים של הישר, נבנה נקודה B' שסימטרית ל-B ביחס לישר ℓ, וניקח את C להיות נקודת החיתוך של AB' עם ℓ.

אזי $|AC-BC|=|AC-B'C|=AB'$, ולכל נקודה אחרת X על ℓ יתקיים $|AX-BX|=|AX-B'X|<AB'$.

4. הוכיחו שבתרגיל הכפל הבא נפלה טעות.

$$\begin{array}{cr} & ***27 \\ \times & xy \\ \hline & *****6 \\ + & ***** \\ \hline & ****46 \end{array}$$

פתרון. נסמן את הספרות של המספר הד-ספרתי שמכפילים בו x,y, ואת המספר הגורם החמש-ספרתי במכפלה נסמן Z.

אז רואים כי $Z\cdot y$ מסתיים ב-6, לכן $y=8$. לכן $Z\cdot y$ מסתיים באותם שתי ספרות כמו $27\cdot 8=160+56=216$. הספרה השנייה מהסוף של המכפלה היא 4 לפי נתון. היא מתקבלת מסכום של שני ספרות: 1 והספרה הנוספת, שחייבת להיות 3. הספרה הנוספת הזאת היא ספרה אחרונה של $Z\cdot x$, ולכן $Z\cdot x$ מסתיים ב-3. לכן $x=9$.

$$\begin{array}{cr} & ***27 \\ \times & x8 \\ \hline & ***16 \\ + & ****3 \\ \hline & ****46 \end{array}$$

מכאן מקבלים סתירה: $Z\cdot 8$ הוא מספר 6-ספרתי, אבל $Z\cdot 9$ שהוא מספר גדול יותר הוא רק 5-ספרתי. לכן בתרגיל הכפל נפלה טעות.

5. באיזו שעה הזווית בין מחוגי השעון שווה ל-5°? מספיק למצוא תשובה אחת.

תשובות אפשריות: שתיים ועשרה, עשרה לעשר.

פתרון. נוכיח ששתיים ועשרה מתאים. בשעה זו המחוג של דקות מצביע על השעה 2. המחוג של שעות הצביע על השעה 2 לפני 10 דקות. תוך שעה מחוג של שעות עושה $\frac{1}{12}$ של סיבוב, כלומר 30° מעלות. תוך 10 דקות המחוג של שעות יעבור חמישית מזה, כלומר 5°. בזמן זה מחוג הדקות יגיע לשעה 2, לכן הזווית בין המחוגים יהיה 5° בדיוק.

הערה. הסבר דומה אפשר לתת למקרה של עשרה לעשר. יש שעות אחרות שבהם זה מתקיים, כי הזווית בין המחוגים חוזרת למצב שכבר היה כל $\frac{12}{11}$ של שעה, אבל כל התשובות האחרות מתרחשות במספר לא שלם של דקות.

6. כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למשוואה $(2013-x)(2013-y)=2013^2$?

תשובה. 27.

פתרון. קל לראות ששני הגורמים במכפלה באגף שמאל חייבים להיות שליליים: לא יתכן ששניהם חיוביים, כי שני הגרומים קטנים מ-2013. מצד שני, כל פירוק של 2013^2 למכפלת שני גורמים שליליים ניתן לראות בתור $(2013-x)(2013-y)$. לכן אנו צריכים לספור את הפירוקים של 2013 למכפלת שני גרומים שליליים. זה בדיוק כמו לספור פירוקים לגורמים שחמים חיוביים, כי ניתן להחליף סימן לשני הגורמים. זה בדיוק

כמו לספור את כמות המחלקים הטבעיים של 2013^2, הרי הגורם הראשון מגדיר את הגורם השני.

בשביל לעשות זאת, נפרק את 2013 לגורמים ראשוניים. קל לראות כי 2013 מתחלק ב-3 וגם ב-11 (הרי סכום הספרות מתחלק ב-3, וסכום הספרות במקומות זוגיים שווה לסכום הספרות במקומות האי-זוגיים). לכן $2013 = 3 \cdot 671 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. בדיקה פשוטה מראה כי 61 ראשוני (אם הוא לא היה ראשוני, היה לא מחלק ראשוני חד-ספרתי, אבל לא קשה להשתכנע שהוא לא מתחלק ב-2, 3, 5, 7). לכן מחלק של $2013^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 61^2$ הוא מספר מסוג $3^\alpha \cdot 11^\beta \cdot 61^\gamma$, כאשר המספרים α, β, γ כולם 0, 1, או 2. זה נותן $3^3 = 27$ אפשרויות.

7. על הלוח כתובים שלושה מספרים: 2001, 2013, 2019. שני שחקנים משחקים משחק. כל שחקן בתורו כותב על הלוח מספר חיובי שלם, שהוא הפרש של שני מספרים שכבר רשומים על הלוח אך שונה מכל מספר שכבר רשום. המפסיד הוא השחקן שאין לו מה לכתוב. מי ינצח במשחק, השחקן הראשון או השני?

תשובה. השני.

פתרון. נשים לב, שכל המספרים הרשומים מתחלקים ב-3 (הרי סכום הספרות של כולם מתחלק ב-3). לכן כל המספרים שיופיעו על הלוח אי-פעם מתחלקים ב-3, ויהיה קטן או שווה מ-2019. אכן, כל מספר שיופיע הוא הפרש של שני מספרים שהופיעו כבר, ואם הם מספרים טבעיים שונים שמתחלקים ב-3 ולא עולים על 2019, אז גם מספר חדש הוא מסוג זה. זה אומר, שעל הלוח לא יכולים להופיע יותר מאשר $2019/3$ מספרים. אנחנו נוכיח, שכל המספרים הטבעיים שמתחלקים ב-3 ולא עולים על 2019 יופיעו.

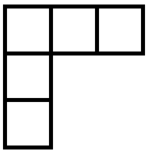
ממה שהוכחנו כבר נובע, שסה"כ יהיו פחות מ-1000 מהלכים, לכן מתישהו לאחד השחקנים לא יהיה עוד מהלך. לכן כל מספר שהיה אפשר לרשום ירשם על הלוח עד סוף המשחק (אחרת השחקן שנגמרו לו מהלכים יוכל לכתוב אותו ולהמשיך לשחק).

בכל שלב של משחק רשומים על הלוח $2019, 2013$ לכן הפרשם 18 גם ירשם על הלוח. מצד שני גם $2013, 2001$ רשומים, לכן הפרשם 12 ירשם. אם ירשם 18 וירשם 12, אז בשלב מסוים ירשם גם 6.

נשים לב, כי חלוקה עם שארית של 2001 ב-6 זה 3 (הרי זה לא מתחלק בשלמות, והשארית צריכה להיות מספר טבעי שקטן מ-6, אבל מתחלק ב-3). לכן בסופו של דבר ירשם מספר 3: הרי מתישהו ירשם $2001-6$, ולכן מתישהו ירשם $2001-2\cdot 6$, ולכן מתישהו ירשם $2001-6k$.

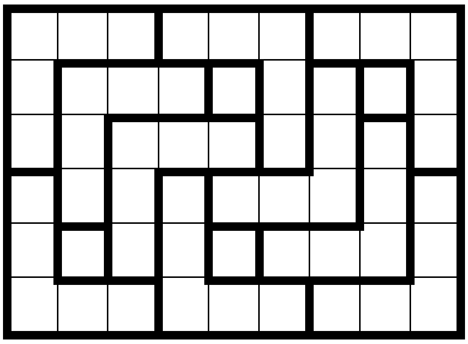
ובכן, מתישהו ירשמו 3. כעת נוכיח, שמתישהו ירשם כל מספר שמתחלק ב-3 וקטן מ-2019. אכן, אם קיים מספר שמתחלק ב-3, קטן מ-2019 ולא ירשם, ניקח מספר הכי גדול שכזה ונסמן אותו N. קל לראות כי $N+3$ ירשם, ולכן גם מרגע שיהיה רשום 3 וגם $N+3$ יהי אפשר לכתוב N, לכן מתישהו במהלך המשחק גם N ירשם.

ובכן, בסופו של משחק יהיו רשומים המספרים $3,6,9,...,2019$, בסה"כ 2 0 1/9 מספרים, כלומר מספר אי-זוגי של מספרים. גם בתחילת המשחק היו רשומים מספר אי-זוגי של מספרים. לכן במהלך המשחק יתבצעו מספר זוגי של מהלכים, כלומר המהלך האחרון יהיה של השחקן השני.



8. פינה מורכבת מחמש משבצות, כמו בציור. מהי הכמות המרבית של פינות שאפשר לחתוך מתוך לוח משבצות 9×6? מותר לסובב את הפינה.

תשובה. 10



פתרון. בלוח 9×6 יש בסה"כ 54 משבצות, לכן לא נוכל ליצור יותר מ-10 פינות. נשאלת השאלה: האם אפשר ליצור 10 פינות? שיטה לעשות זאת מופיעה בציור. כל לראות, שמתבזבזות רק 4 משבצות, לכן יש 10 פינות.

כיתות ח'

1. חיים סיפר לחברו משה: "אין לי בנות, ולכל אחד מהבנים שלי מספר בנים השווה למספר הבנים שלי. מספר הנכדים שלי גדול מ-50, אך קטן מ-80". כמה בנים יש לחיים?

תשובה. 8.

פתרון. אם יש N בנים, אז יש N^2 נכדים. רואים כי 7 זה מעט מדי $7^2=49$, מצד שני 9 זה יותר מדי $9^2=81$, לכן 8 זו האפשרות היחידה.

2. פתרו את המשוואה $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.
הערה: $[x]$ הוא החלק השלם של x, כלומר המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ-x. $\{x\}$ הוא החלק השברי של x, כלומר $x-[x]$.

תשובה. $x=-1$.

פתרון. חוץ מ-$\{x\}$, כל המחוברים בשני הצדדים של המשוואה חייבים להיות שלמים, לכן גם $\{x\}$ שלם, כלומר $\{x\}=0$ והמספר x שלם. לכן ניתן להעתיק את התנאי בצורה

$$x^3+x^2+x=-1$$

כאשר x מספר שלם. כלומר

$$x^3+x^2+x+1=0$$

$$(x+1)(x^2+1)=0$$

המספר x^2+1 בהכרח חיובי, לכן התנאי הוא $x+1=0$. במילים אחרות $x=-1$.

3. מתוך 2013 מטבעות זהים למראֶה יש 100 מטבעות מזויפים. כל המטבעות המזויפים שווים במשקלם, וכך גם כל המטבעות האמיתיים. ידוע שמשקל מטבע מזויף שונה ב-1 ממשקל מטבע אמיתי. נתונים מאזני כפות עם מחוג, שבשקילה מראים את ההפרש בין משקלי הכפות. בוחרים מטבע. האם אפשר באמצעות שקילה אחת לבדוק אם המטבע אמיתי?

תשובה. כן.

פתרון. נשים את המטבע הנבחר בצד, ואת כל המטבעות האחרים נשים על המאזנים, 1006 מטבעות בכל כף. אם המטבע מזויף, אז יש מספר אי-זוגי של מטבעות מזויפים על המאזניים, כלומר ההפרש בין הכפות יהיה אי-זוגי. אם המטבע אמיתי, יהיה מטבע אמיתי, אז יהיה מספר זוגי של מטבעות מזויפים על כפות המאזניים, כלומר ההפרש זוגי בין המשקלים יהיה זוגי. לכן לפי הזוגיות של הפרש המשקלים נוכל לדעת, האם המטבע אמיתי.

4. כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למשוואה $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2013}$?

תשובה. 27.

פתרון. באופן שקול ניתן לכתוב $2013(x+y)=xy$ או

$$2013^2=(x-2013)(y-2013)$$

זה בדיוק זהה לשאלה 6 עבור כיתות ז'. הקוראים יכולים להשלים את הפתרון מכאן או לקרוא את המשל הפתרון בפתרון של שאלה 6 עבור כיתות ז'.

5. כמה צלעות יכולות להיות למצולע קמור, אם כל אלכסוניו שווים באורכם?

תשובה. 4 או 5.

פתרון. למשולש אין אלכסונים, אז השאלה חסרת משמעות (אם כי אפשר להגיד, שכל אלכסוניו שווים, הרי אין לו אלכסונים). למלבן ולמחומש משוכלל כל האלכסונים בעלי אותו אורך, לכן 4 ו-5 אפשרי. נוכיח שלא יכול להיות יותר.

נניח כי יש מצולע בעל יותר מ-5 קודקודים, ו-6 קודקודים ראשונים שלו נגד כיוון השעון הם A, B, C, D, E, F בסדר זה. אז AD = BD, לכן D נמצא על האנך האמצעי של AB. בדומה E נמצא על האנך האמצעי של AB. לכן הישר DE חותך את AB באמצע. זה לא יתכן, כי במצולע קמור לא צלע ולא המשכו לא יחתוך צלע אחר באמצע.

6. a,b,c מספרים טבעיים. הוכיחו כי אחד המספרים

$$a^5b-b^5a\ ,\ a^5c-c^5a\ ,\ b^5c-c^5b$$

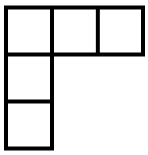
מתחלק ב-16.

פתרון. כל מספר הוא זוגי או אי-זוגי, לכן מבין המספרים a,b,c יש שניים עם אותה זוגיות. נבדוק שני מקרים: כאשר יש שניים זוגיים, וכאשר יש שניים אי-זוגיים.
נניח שיש שניים זוגיים, ללא הגבלת הכלליות אלה הם a,b. אז גם a^5b וגם b^5a מתחלקים ב- 2^6, לכן הם גם מתחלקים ב-16.
כעת נניח כי יש מבין המספרים a,b,c שני מספרים אי-זוגיים, ללא הגבלת הכלליות אלה הם a,b. אז

$$a^5b-b^5a=ab\left(a^4-b^4\right)=ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)=ab\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)\left(a-b\right)$$

במכפלה זאת יש שלושה גורמים זוגיים: $a^2+b^2\ ,\ a+b\ ,\ a-b$, לכן המכפלה בהכרח מתחלקת בשמונה. נוכיח, שאחד מבין הגורמים האלה מתחלק ב-4, ואז יהיה ברור שהמכפלה מתחלקת גם ב-16.
יש שני סוגים של מספרים אי-זוגיים: כאלה שהם $4k+1$ וכאלה שהם $4k-1$. אם המספרים a ו- b הם מאותו סוג, אז $a-b$ מתחלק ב-4. אם הם מסוגים שונים, אז $a+b$ מתחלק ב-4. בכל מקרה אחד המספרים $a-b\ ,\ a+b$ מתחלק ב-4.

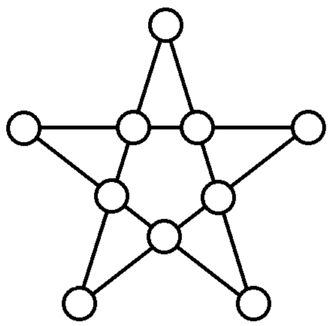
הערה. יש דרך אחרת לנסח את הפתרון, שמבוססת על הטענה הבאה: n^4 זה תמיד מספר מסוג $16k$ (אם n זוגי) או מסוג $16k+1$ (אם n אי-זוגי). אנחנו משאירים לקוראים להשלים את הדרך השנייה, כולל הוכחת הטענה.



7. פינה מורכבת מחמש משבצות, כמו בציור. מהי הכמות המרבית של פינות שאפשר לחתוך מתוך לוח משבצות 9×6? מותר לסובב את הפינה.

ראו פתרון של שאלה 8 לכיתות ז' (שהיא אותה השאלה).

כיתות ט'



1. האם ניתן למלא את העיגולים שבכוכב במספרים שלמים, כך שסכום המספרים בכל 4 עיגולים על קו אחד יהיה אי-זוגי?

תשובה. לא.

פתרון. עם זה היה מתאפשר, הסכום הכולל של הסכומים בכל 5 הקווים היה מספר אי-זוגי, הרי זה סכום של 5 מספרים אי-זוגיים. מצד שני, דרך כל עיגול בציור עוברים שני קווים, לכן הסכום הזה שווה לפעמיים הסכום של כל 10 המספרים בעיגולים, כלומר מספר זוגי. קיבלנו סתירה: מספר אי-זוגי שווה למספר זוגי. לכן זה לא אפשרי.

2. פונקציה מקיימת $f(xy)=f(x)+f(y)$ לכל x , y ממשיים. חשבו את $f(2013)$, אם נתון כי $f(183)=10$, $f(33)=9$, $f(9)=8$.

תשובה. 15.

פתרון. קל לראות כי $8=f(9)=f(3\cdot 3)=2f(3)$, ולכן $f(3)=4$. נשים לב כי

$$33=3\cdot 11$$
$$183=3\cdot 61$$
$$2013=3\cdot 671=3\cdot 11\cdot 61$$

לכן $f(2013)+f(3)=f(2013\cdot 3)=f(33\cdot 183)=f(33)+f(183)$.

כלומר $f(2013)+4=9+10$. זאת אומרת $f(2013)=15$. מש"ל.

הערה. בניסוח של שאלה זו יש שגייה. היה הרבה יותר הגיוני לדרוש את התנאי $f(xy)=f(x)+f(y)$ רק עבור x, y חיוביים. אכן, אם נציב $y=0$ אז נקבל שלכל x ממשי, $f(0\cdot x)=f(x)+f(0)$, ולכן $f(x)=0$ לכל x ממשי. זה נוגד את הנתון $f(9)=8$, כלומר הפונקציה הנתונה לא קיימת. כמובן, המתחרה שמוצא את הבעיה הזו אמור לקבל את כל הניקוד של השאלה.

3. נתונים 15 מספרים ראשוניים שונים שיוצרים סדרה חשבונית, כלומר ניתן לרשום אותם בתור $p, p+d, p+2d,..., p+14d$. הוכיחו כי $d>30000$.

פתרון. נוכיח ש- d מתחלק ב-$2,3,5,7,11,13$.

לכל מספר q ראשוני למספרים $p, p+d, p+2d, ... , p+(q-1)d$ שאריות שונות בחלוקה ל- q, הרי הפרש בין כל שניים לא מתחלק ב- q. מכיוון שיש סה"כ q שאריות, אז יש ברשימה גם מספר $p+kd$ שמתחלק ב- q. הוא לא ראשוני אלה אם כן הוא שווה ל- q. עבור $q=2,3,5$ ניתן להתבונן במספר $p+(k+q)d$, שגם הוא מתחלק ב- q אבל הוא חייב להיות ראשוני לפי הנתון.

לכן כבר הוכחנו ש- d מתחלק ב-$2\cdot 3\cdot 5=30$.

לכן עבור $q=7,11,13$ המספרים $p+d, p+2d, ... , p+(q-1)d$ גדולים מ-13, לכן המספר שמתחלק ב- q הוא p . אבל אז גם $p+qd$ מתחלק ב- q והוא כבר לא ראשוני, בניגוד לנתון. ובכן, גם עבור $q=7,11,13$ ההפרש d מתחלק ב- q .

ובכן d מתחלק ב- $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13=30\cdot 11\cdot 91=30\cdot 1001=30030$.

לכן d גדול מ-30000.

הערה. מסתבר שקיימים סדרות חשבוניות ממספרים ראשוניים, ולא רק באורך 15 אלה גם באורך N לכל N שלם. זה משפט מפורסם של Tao ו-Green שהוכח לפני כ-10 שנים. קל לראות שאין סדרה חשבונית באורך אינסופי שמורכבת ממספרים ממשיים, הרי כבר $p+pd$. הוא לא מספר ראשוני.

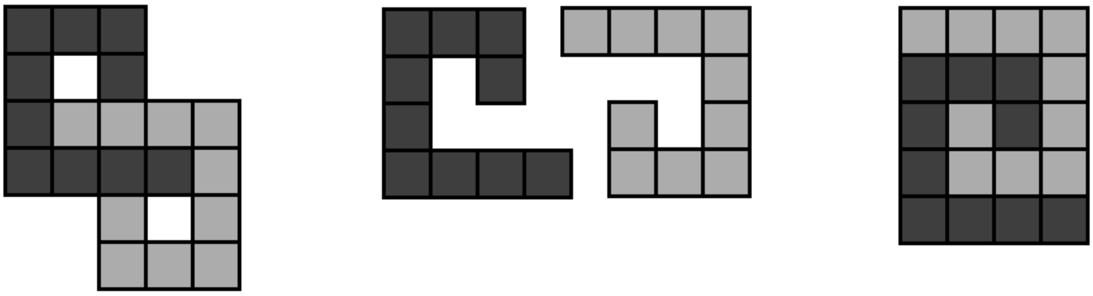
4. בממלכה יש 3 מעמדות, ובהם אחוזי התמיכה במלך הם $a\ \%$, $b\ \%$, $c\ \%$, כאשר a,b,c שלושה מספרים ממשיים שונים זה מזה, המקיימים $a+b+c=100$.
האם יתכן שאחוז התמיכה במלך באוכלוסיה כולה קטן מ-1% ?

תשובה. כן.

פתרון. נניח שיש 1000 במעמד ראשון, 9000 אנשים במעמד שני, 990000 אנשים במעמד שלישי (סה"כ מיליון אנשים). נניח שיש 89.9% במעמד ראשון, 10% אחוזי תמיכה במעמד שני ו-0.1% במעמד השלישי. כלומר יש 889 תומכי מלך מהמעמד הראשון, 900 מהמעד השני, ו-990 במעמד השלישי. סה"כ יש פחות מ-3000 תומכים למלך, שזה 0.3%, כלומר פחות מאחוז.

5. פרקו את הצורה לשני חלקים חופפים, שמהם ניתן להרכיב מלבן.

פתרון.



6. מצאו את כל ערכי n הטבעיים, עבורם $4n^4-n^2+4$ מספר ראשוני.

תשובה. רק $n=1$.
פתרון.

$$4n^4-n^2+4=4n^4+8n^2+4-9n^2=\left(2n^2+2\right)^2-\left(3n\right)^2=$$

$$=\left(2n^2+2\right)^2-\left(3n\right)^2==\left(2n^2-3n+2\right)\left(2n^2+3n+2\right)$$

נראה שעבור $n>1$ גדול מספיק שני הגורמים באגף ימין גדולים מ-1.
אכן, כאשר $n>1$ אז $2n-3>1$, ולכן $2n^2-3n+2=n\left(2n-3\right)+2>2$.
כמובן לכל n טבעי $2n^2+3n+2>2$. לכן המספר מתפרק למכפלה של שני מספרים גדולים מ-1. לכן נשאר לבדוק $n=1$ ואז מקבלים $4-1+4=7$.

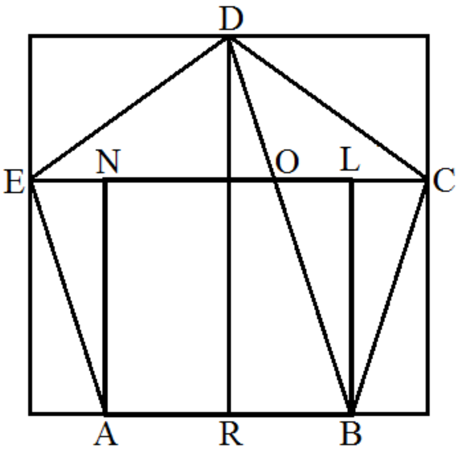
7. במחומש משוכלל ABCDE הצלע AB אופקית. צלעות המלבן P_1 עוברות דרך כל הקודקודים של המחומש, כאשר אחת הצלעות שלו מכילה את A ואת B. הגובה של המלבן P_1 הוא h_1, והרוחב שלו הוא w_1. שני קודקודים של המלבן P_2 הם A ו-B, ושני הקודקודים האחרים נמצאים על הישר CE. הגובה של המלבן P_2 הוא h_2 ורוחבו w_2.

מה גדול יותר, $\frac{w_1}{h_1}$ או $\frac{w_2}{h_2}$?

תשובה. המספרים שווים.

פתרון ראשון. נגיד שהמלבן הקטן הוא ABLN. תהי נקודה R אמצע של AB, אז DR הוא הגובה מ-D על AB. אז במלבן P_1 הקטע EC הוא הרוחב, והקטע DR הוא הגובה, כלומר $h_1 = \mathrm{DR}$, וגם $w_1 = \mathrm{CE} = \mathrm{DB}$ (הרי כל האלכסונים במחומש משוכלל שווים). לכן לא נזדקק לסימונים עבור קודקודי המלבן P_1.

נסמן ב-O את נקודת החיתוך של אלכסוני המחומש BD ו-EC. קל לראות כי האלכסונים האלה מקבילים לצלעות המחומש המשוכלל AE ו-AB בהתאמה. לכן ABOE מקבילית. בעצם ABOE גם מעוין, הרי $\mathrm{AB} = \mathrm{AE}$.



לכן $w_2 = \mathrm{AB} = \mathrm{BO}$.

אנו מתבקשים להשוות בין $\frac{w_2}{h_2} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{LB}}$ לבין $\frac{w_1}{h_1} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{DR}} = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DR}}$.

אבל המשולשים DRB, BLO ישרי זווית ודומים, הרי $\sphericalangle \mathrm{BLO} = 90^\circ = \sphericalangle \mathrm{DRB}$, וגם $\sphericalangle \mathrm{LBO} = \sphericalangle \mathrm{BDR}$.

ולכן $\frac{w_1}{h_1} = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DR}} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{LB}} = \frac{w_2}{h_2}$. לכן היחסים שווים, מש"ל.

הערה. מכאן אפשר גם להסיק שהישרים RL, RN עוברים גם דרך קודקודים של המלבן הגדול.

פתרון שני. נחשב את השטח של משולש BEC בשני דרכים. מצד אחד צלע $\mathrm{EC} = w_1$ והגובה על הצלע הזו h_2, לכן $S_{\mathrm{BEC}} = \frac{w_1 h_2}{2}$. מצד שני צלע שלו $\mathrm{BC} = \mathrm{AB} = w_2$ והגובה מ-E על BC שווה לגובה מ-D ל-AB (הרי המחומש משוכלל) שזה w_1, ולכן

$$\frac{w_2 h_1}{2} = S_{\mathrm{BEC}} = \frac{w_1 \cdot h_2}{2}.$$

מכאן $w_2 h_1 = w_1 h_2$, ולכן $\frac{w_1}{h_1} = \frac{w_2}{h_2}$. מש"ל.